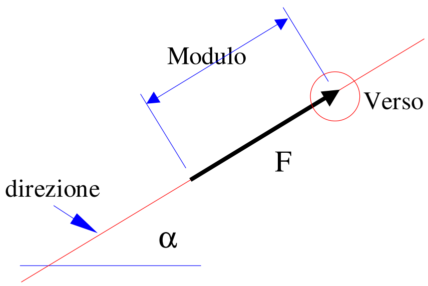
APPUNTI SULLA STATICA

GRANDEZZE VETTORIALI: sono grandezze rappresentate da un modulo (numero x unità di misura), da una linea d'azione (retta lungo la quale agiscono), da un verso (senso in cui agiscono).

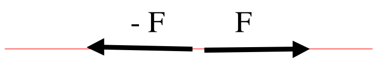
Esempi: forza (N), peso (N), velocità (m/s), accelerazione (m/s^2).

VETTORE: è un ente geometrico (segmento) definito da **linea d'azione** (o direzione), **verso** (freccia del segmento), **modulo** (lunghezza) e punto di applicazione (coda del segmento).



NOTA: *per assegnare la direzione di un vettore si deve specificare un angolo rispetto a una direzione nota. Nel caso in figura è assegnato l'angolo rispetto all'orizzontale.*

OPPOSTO DI UN VETTORE: è lo stesso vettore col verso cambiato; se F è un vettore, il suo opposto si indica con - F (attenzione! Il modulo di - F è positivo)



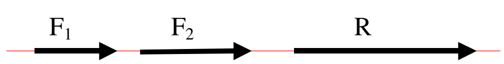
Il vettore - F ha lo stesso modulo e la stessa direzione del vettore F

FORZE: sono le cause che cambiano lo stato di quiete o di moto di un corpo.

SOMMARE più forze significa calcolare la **RISULTANTE** che è quella **forza unica che produce lo stesso effetto** di tutte le forze insieme, chiamate componenti.

RISULTANTE DI FORZE CONCORDI AVENTI STESSA LINEA D'AZIONE: è una forza che ha la stessa linea d'azione e lo stesso verso delle componenti e, per modulo la somma aritmetica dei moduli delle componenti.

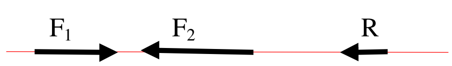
Forze componenti concordi



$$R = F_1 + F_2$$

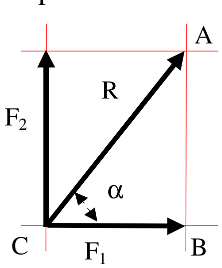
RISULTANTE DI FORZE DISCORDI AVENTI STESSA LINEA D'AZIONE: è una forza che ha la stessa linea d'azione il verso delle forze maggiori e, il modulo uguale alla somma algebrica dei moduli delle componenti.

Forze componenti discordi



$$R = F_2 - F_1$$

RISULTANTE DI DUE FORZE INCIDENTI ORTOGONALI: è la forza data dalla diagonale del rettangolo che ha per lati le forze componenti.

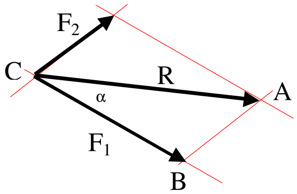


Le forze F_1 e F_2 sono le forze componenti, la forza R è la risultante

Per definire in modo completo la risultante occorre conoscere il suo verso che si determina graficamente, il suo modulo (cioè la sua lunghezza) e la sua direzione (per esempio l'angolo α)

Notare che dalla costruzione grafica del parallelogramma si sono formati due triangoli rettangoli.

RISULTANTE DI DUE FORZE INCIDENTI QUALSIASI: è una forza data dalla diagonale del parallelogramma che ha per lati le forze componenti.



Le forze F_1 e F_2 sono le forze componenti, la forza R è la risultante

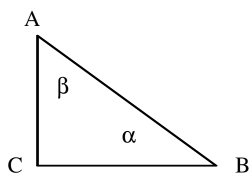
Per definire in modo completo la risultante occorre conoscere il suo verso che si determina graficamente, il suo modulo (cioè la sua lunghezza) e la sua direzione (per esempio l'angolo α)

Notare che dalla costruzione grafica del parallelogramma si sono formati due triangoli non più rettangoli.

Per risolvere problemi di composizione di forze incidenti perpendicolari è necessario conoscere teoremi e proprietà del triangolo rettangolo.

RISOLUZIONE TRIANGOLO RETTANGOLO

TEOREMA DI PITAGORA: in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

$\overline{AB}$ ipotenusa ; $\overline{AC}$ cateto ; $\overline{BC}$ cateto

α (alfa) angolo opposto al cateto AC

β (beta) angolo opposto al cateto BC

La somma degli angoli interni è sempre 180°, quindi essendo un angolo di 90°, ne segue che

$$\alpha + \beta = 90°$$

Si danno di seguito, le definizioni di **seno, coseno, tangente** di un angolo in un triangolo rettangolo.

SENO (sin) DI UN ANGOLO: è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa.

$$\text{seno angolo} = \frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad ; \quad \overline{AC} = \overline{AB}\ \sin\alpha \quad ; \quad \overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}$$

$$\sin\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad ; \quad \overline{BC} = \overline{AB}\ \sin\beta \quad ; \quad \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\sin\beta}$$

COSENO (cos) DI UN ANGOLO: è il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo e l'ipotenusa.

$$\text{coseno angolo} = \frac{\text{cateto adiacente all'angolo}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad ; \quad \overline{BC} = \overline{AB}\ \cos\alpha \quad ; \quad \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad ; \quad \overline{AC} = \overline{AB}\ \cos\beta \quad ; \quad \overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos\beta}$$

TANGENTE (tg) DI UN ANGOLO: è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e il cateto adiacente all'angolo.

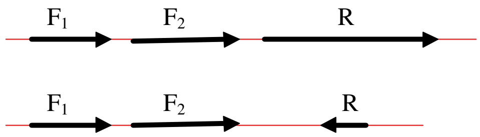
$$\text{tangente angolo} = \frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{cateto adiacente all'angolo}}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad ; \quad \overline{AC} = \overline{BC}\ \mathrm{tg}\alpha \quad ; \quad \overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\mathrm{tg}\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad ; \quad \overline{BC} = \overline{AC}\ \mathrm{tg}\beta \quad ; \quad \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\mathrm{tg}\beta}$$

ESERCIZI SULLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE

Determinare la somma e la differenza delle forze F_1 = 2000 N ed F_2 = 3000 N aventi stessa linea d'azione orizzontale.

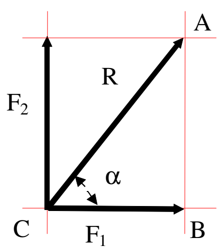


$$R = F_1 + F_2 = 5000N$$

$$R = F_1 - F_2 = 1000N \quad \text{con verso opposto a quello di } F_2$$

Determinare la risultante delle forze ortogonali incidenti rappresentate in figura:

si compongono con la regola del parallelogramma



F_1 = 1000 N
F_2 = 1300 N
Dal triangolo rettangolo ABC si calcola

$$R = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2}} = \sqrt{1000^2 + 1300^2} = 16400N$$

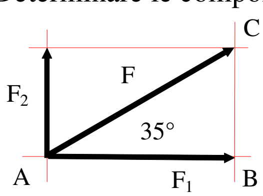
$$tg\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1300}{1000} = 1{,}3$$

$$\alpha = tg^{-1}(1{,}3) = 52{,}43°$$

ESERCIZI SULLA SCOMPOSIZIONE DELLE FORZE

Scomporre una forza vuol dire sostituire ad una forza assegnata due forze secondo due direzioni assegnate. Si opera in modo inverso rispetto alla composizione, applicando la regola del parallelogramma. Esempio.

Determinare le componenti della forza F = 5000 N in figura, secondo le direzioni assegnate:



Dal triangolo rettangolo ABC si calcola:

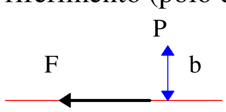
$$F_1 = F\cos 35° = 5000 \text{ x } 0{,}819 = 4095{,}7 \text{ N}$$

$$F_2 = F\sin 35° = 5000 \text{ x } 0{,}573 = 2867{,}8 \text{ N}$$

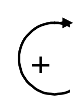
MOMENTO DI UNA FORZA rispetto ad un punto: è un vettore il cui modulo è dato dal prodotto dell'intensità della forza per la sua distanza (braccio) dal punto. Il BRACCIO è inteso come distanza dal punto alla linea d'azione della forza e NON al punto di applicazione della forza.

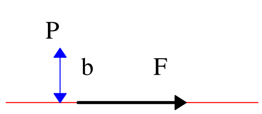
Momento = forza × braccio $\qquad\qquad$ $M = F \cdot b$ (N·m)

L'effetto di un momento di una forza è sempre quello di produrre una rotazione attorno al punto di riferimento (polo dei momenti).

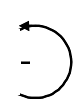


rotazione oraria ⇒ momento positivo
$M_P = F \cdot b$



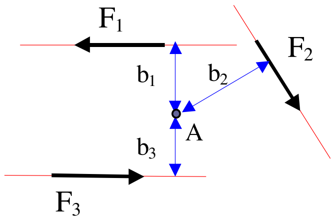


rotazione antioraria ⇒ momento negativo
$M_P = -(F \cdot b)$



MOMENTO DI UN SISTEMA DI FORZE rispetto ad un punto: è la somma algebrica dei momenti delle singole forze calcolati rispetto allo stesso punto.

Esempio: per il sistema di tre forze, come in figura, il momento calcolato rispetto al punto **A** vale

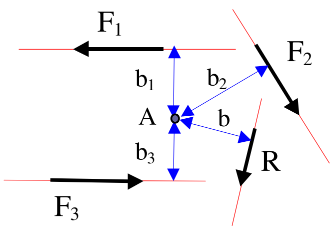


$$M_A = -F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3$$

Cambiando il punto rispetto a cui si calcola il momento, varia il valore del momento del sistema di forze, perché cambiano le distanze tra punto e direzioni delle forze.

TEOREMA DI VARIGNON: in un sistema di forze complanari il momento della risultante rispetto ad un punto è uguale alla somma algebrica dei momenti delle singole forze rispetto allo stesso punto.

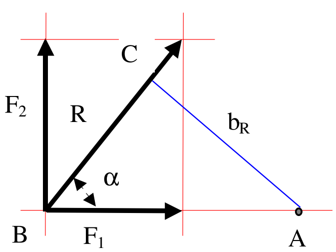
$$\text{momento della risultante} = \text{somma dei momenti delle forze}$$
$$R \cdot b \quad = \quad F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + \cdots\cdots + F_n \cdot b_n$$
$$R \cdot b = \sum F_i \cdot b_i$$



Per il sistema in figura, se **R** è la risultante delle tre forze componenti, risulterà:

$$R \cdot b = -F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3$$

ESEMPIO: verificare la validità del teorema di Varignon per il sistema di forze in figura, calcolando il momento rispetto al punto A assegnato, che giace nella direzione di F_1 e che dista 2 m dalla direzione di F_2.



$F_1 = 1000$ N
$F_2 = 1300$ N

Considerando le forze componenti, il momento rispetto ad A vale

$$M_A = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 2 = 1300\,\text{N} \times 2\,\text{m} = 2600\,\text{Nm}$$

Adesso calcoliamo la risultante e di questa ne facciamo il momento rispetto allo stesso punto A

$$R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}} = \sqrt{1000^2 + 1300^2} = 1640{,}12\,\text{N}$$

$$\text{tg}\alpha = \tfrac{F_2}{F_1} = \tfrac{1300}{1000} = 1{,}3 \qquad\qquad \alpha = \text{tg}^{-1}(1{,}3) = 52{,}43°$$

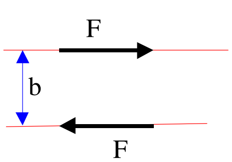
Per il calcolo del braccio della risultante si considera il triangolo rettangolo ACB

$$b_R = \overline{AB} \cdot \sin\alpha = 2 \times \sin 52.43° = 1{,}585\,\text{m}$$

Il momento della risultante vale: $R \cdot b_R = 1640{,}12\ \text{N} \times 1{,}585\,\text{m} \cong 2600\,\text{Nm}$ che è uguale a M_A

COPPIA: sistema di due forze complanari, parallele, di uguale intensità e di verso opposto.

MOMENTO DI UNA COPPIA: prodotto dell'intensità di una delle due forze per la distanza tra le forze.

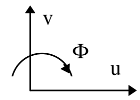


Il **momento di una coppia è COSTANTE** qualunque sia il punto considerato.

$M = F \cdot b$ <u>COSTANTE</u> per qualsiasi punto del piano

CORPO RIGIDO: corpo ideale assolutamente indeformabile, cioè la distanza tra due suoi punti qualsiasi è sempre uguale.
Un corpo che si muove in un piano ha tre possibilità di movimento o tre gradi di libertà:

u	traslazione orizzontale
v	traslazione verticale
ϕ	rotazione nel piano

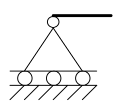
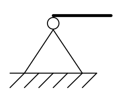
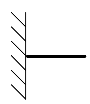


CONDIZIONI DI EQUILIBRIO: un corpo è in equilibrio se il sistema di forze cui è sottoposto ha risultante nulla e momento nullo rispetto ad un punto qualsiasi del piano.

$$R = 0 \qquad M = 0 \;\Rightarrow\; \text{il corpo è in equilibrio.}$$

VINCOLO: qualunque collegamento esterno adatto ad impedire i vari movimenti di un corpo.

REAZIONE VINCOLARE: forza esercitata dal vincolo per impedire i movimenti del corpo rigido.

tipo di vincolo	rappres. grafica	MOVIMENTI	REAZIONI VINCOLARI
CERNIERA SCORREVOLE (vincolo semplice)		$v=0$, $\Phi\neq 0$, $u\neq 0$	V
CERNIERA FISSA (vincolo doppio)		$v=0$, $\Phi\neq 0$, $u=0$	V, H
INCASTRO (vincolo triplo)		$v=0$, $\Phi=0$, $u=0$	V, M_I, H

H	reazione vincolare orizzontale
V	reazione vincolare verticale
M_I	reazione vincolare di momento

Ogni vincolo esplica tante reazioni quanti sono i movimenti che impedisce ed <u>ogni reazione ha la direzione del movimento impedito</u>.

STRUTTURA ISOSTATICA: quando il numero di vincoli è strettamente necessario per garantirne l'equilibrio o per impedirne qualsiasi movimento.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA: sono tre equazioni di equilibrio che ci permettono di calcolare le reazione vincolari in strutture isostatiche.

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow F_{1x} + F_{2x} + \cdots\cdots\cdots + F_{nx} + H = 0$$ equilibrio alla traslazione orizzontale

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow F_{1y} + F_{2y} + \cdots\cdots\cdots + F_{ny} + V = 0$$ equilibrio alla traslazione verticale

$$\sum F_i \cdot b_i = 0 \Rightarrow F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + \cdots + F_n \cdot b_n + M_I = 0$$ equilibrio alla rotazione rispetto ad un punto qualsiasi del piano

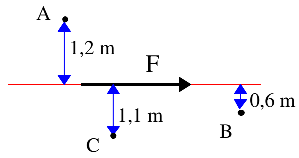
CALCOLO REAZIONI VINCOLARI: strategia di risoluzione.

1) Si scompongono eventuali forze inclinate secondo le direzioni perpendicolare e parallela (o coincidente) all'asse della struttura.
2) Si segnano le reazioni vincolari (incognite del problema) che i vincoli possono esplicare assegnandogli un verso arbitrario.
3) Si scrivono e si risolvono le tre equazioni cardinali della statica tenendo conto sia delle forze esterne che delle reazioni vincolari, da cui si calcolano le reazioni vincolari incognite.
4) Se le reazioni vincolari risultano positive vuol dire che i versi scelti arbitrariamente sono esatti, se qualcuna delle reazioni vincolari risulta negativa vuol dire che il verso scelto arbitrariamente è errato, quindi bisogna cambiargli il verso.

L'INSIEME DELLE FORZE ESTERNE APPLICATE ALLA STRUTTURA E DELLE REAZIONI VINCOLARI COSTITUISCONO UN SISTEMA DI FORZE AVENTE $R = 0$, $M = 0$ (CIOÈ EQUILIBRATO), QUINDI LA STRUTTURA È IN EQUILIBRIO.

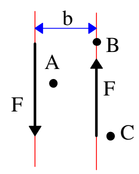
ESERCIZI SVOLTI SUI MOMENTI

1) Calcolare il momento della forza F = 2000 N rispetto ai punti A, B, C segnati in figura:



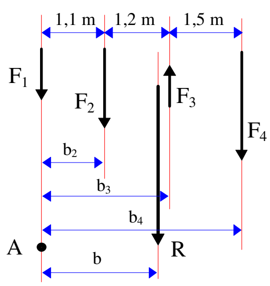
$$M_A = -(F \cdot b) = -(2000 \times 1{,}2) = -2400\ N \cdot m$$
$$M_B = (F \cdot b) = (2000 \times 0{,}6) = 1200\ N \cdot m$$
$$M_C = (F \cdot b) = (2000 \times 1{,}1) = 2100\ N \cdot m$$

2) Calcolare il momento di una coppia avente F = 1500 N e braccio b = 2,5 m rispetto ai punti A, B, C segnati in figura:



Poiché il momento di una coppia di forze è costante qualunque sia il punto rispetto a cui si calcola si ha:
$M_A = M_B = M_C = -(F \cdot b) = -(1500 \times 2{,}5) = -3750\ N \cdot m$ negativo perché ha senso di rotazione antiorario

3) Calcolare la risultante del sistema di forze F1 = 1000 N, F2 = 2000 N, F3 = 500 N, F4 = 3000 N parallele, rappresentato in figura, applicando il teorema di Varignon.



Della risultante da calcolare sono noti l'intensità
$$R = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 1000 + 2000 - 500 + 3000 = 5500N$$
il verso (dall'alto in basso) e la direzione che è parallela alle direzioni delle forze componenti, ma non conosco per quale punto passa; applico il teorema di Varignon calcolando i momenti rispetto ad un punto A scelto arbitrariamente:

$$R \cdot b = F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4$$
dove l'incognita è il braccio b della risultante

$$b = \frac{F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4}{R} = \frac{1000 \times 0 + 2000 \times 1{,}1 - 500 \times 2{,}3 + 3000 \times 3{,}8}{5500} = 2{,}26\ m$$