STATICA DEL CORPO RIGIDO

(Distillazione verticale)

OBIETTIVO: SAPERE CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI NELLE STRUTTURE ISOSTATICHE.

- Momento di una forza rispetto ad un punto (def.)
  Unità di misura
  Convenzione sui segni
  Convenzione di rappresentazione

- Momento di un sistema di forze rispetto ad un punto (def.)

- Coppia di forze (def.)

- Momento di una coppia di forze (def.)

- Teorema di Varignon (enunciato + formula)

- Corpo rigido (def.)
  Possibili movimenti nel piano (descr.)
  Condizione di equilibrio $R = 0$ $M = 0$

- Vincolo (def.)

- Reazione vincolare (def.)

- Tipi di vincoli
  cerniera scorrevole (descr.)
  cerniera fissa (descr.)
  incastro (descr.)
  Movimenti impediti e relative reazioni vincolari (descr.)

- Struttura isostatica (def.)

- Equazioni cardinali della statica (appl.)
  $\sum F_x = 0$ equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale
  $\sum F_y = 0$ equazione di equilibrio alla traslazione verticale
  $\sum M = 0$ equazione di equilibrio alla rotazione

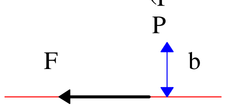
- Calcolo reazioni vincolari (appl.)
  Strategia di risoluzione (descr.)
  Esempi

STATICA DEL CORPO RIGIDO - SCHEDA DI LEZIONE

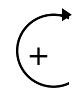
MOMENTO DI UNA FORZA rispetto ad un punto: è un vettore il cui modulo è dato dal prodotto dell'intensità della forza per la sua distanza (braccio) dal punto. Il BRACCIO è inteso come distanza dal punto alla linea d'azione della forza e NON al punto di applicazione della forza.

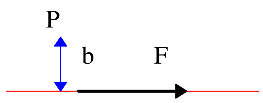
$$\text{Momento} = \text{forza} \times \text{braccio} \qquad\qquad M = F \cdot b \ \ (N \cdot m)$$

L'effetto di un momento di una forza è sempre quello di produrre una rotazione attorno al punto di riferimento (polo dei momenti).

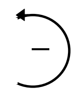


rotazione oraria $\Rightarrow$ momento positivo $M = F \cdot b$





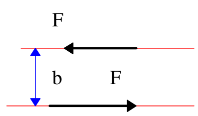
rotazione antioraria $\Rightarrow$ momento negativo $M = - (F \cdot b)$



MOMENTO DI UN SISTEMA DI FORZE rispetto ad un punto: è la somma algebrica dei momenti delle singole forze calcolati rispetto allo stesso punto.

COPPIA: sistema di due forze complanari, parallele, di uguale intensità e di verso opposto.

MOMENTO DI UNA COPPIA: prodotto dell'intensità di una delle due forze per la distanza tra le forze.
Il momento di una coppia è costante qualunque sia il punto considerato.



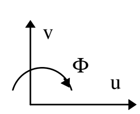
$M = F \cdot b$ <u>COSTANTE</u> per qualsiasi punto del piano

TEOREMA DI VARIGNON: in un sistema di forze complanari il momento della risultante rispetto ad un punto è uguale alla somma algebrica dei momenti delle singole forze rispetto allo stesso punto.

$$R \cdot b = F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + \cdots\cdots + F_n \cdot b_n$$
$$R \cdot b = \sum F_i \cdot b_i$$

CORPO RIGIDO: corpo ideale assolutamente indeformabile, cioè la distanza tra due suoi punti qualsiasi è sempre uguale.
Un corpo che si muove in un piano ha tre possibilità di movimento o tre gradi di libertà:

- u traslazione orizzontale
- v traslazione verticale
- ϕ rotazione nel piano

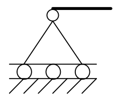
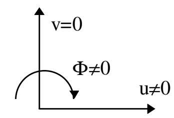
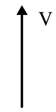
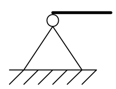
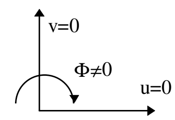
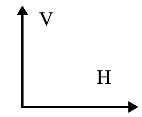
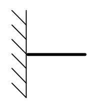
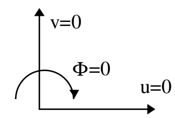
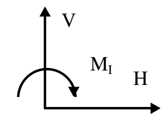


CONDIZIONI DI EQUILIBRIO: un corpo è in equilibrio se il sistema di forze cui è sottoposto ha risultante nulla e momento nullo rispetto ad un punto qualsiasi del piano.

$$R = 0 \qquad M = 0 \ \Rightarrow \ \text{il corpo è in equilibrio.}$$

VINCOLO: qualunque collegamento esterno adatto ad impedire i vari movimenti di un corpo.

REAZIONE VINCOLARE: forza esercitata dal vincolo per impedire i movimenti del corpo rigido.

tipo di vincolo	rappres. grafica	MOVIMENTI	REAZIONI VINCOLARI
CERNIERA SCORREVOLE (vincolo semplice)			
CERNIERA FISSA (vincolo doppio)			
INCASTRO (vincolo triplo)			

H reazione vincolare orizzontale
V reazione vincolare verticale
M_I reazione vincolare di momento

Ogni vincolo esplica tante reazioni quanti sono i movimenti che impedisce ed <u>ogni reazione ha la direzione del movimento impedito</u>.

STRUTTURA ISOSTATICA: quando il numero di vincoli è strettamente necessario per garantirne l'equilibrio o per impedirne qualsiasi movimento.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA: sono tre equazioni di equilibrio che ci permettono di calcolare le reazione vincolari in strutture isostatiche.

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow F_{1x} + F_{2x} + \cdots\cdots\cdots + F_{nx} + H = 0$$ equilibrio alla traslazione orizzontale

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow F_{1y} + F_{2y} + \cdots\cdots\cdots + F_{ny} + V = 0$$ equilibrio alla traslazione verticale

$$\sum F_i \cdot b_i = 0 \Rightarrow F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + \cdots + F_n \cdot b_n + M_I = 0$$ equilibrio alla rotazione rispetto ad un punto qualsiasi del piano

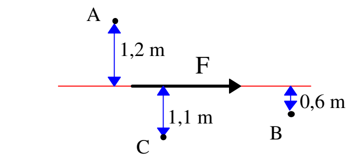
CALCOLO REAZIONI VINCOLARI: strategia di risoluzione.

1) Si scompongono eventuali forze inclinate secondo le direzioni perpendicolare e parallela (o coincidente) all'asse della struttura.
2) Si segnano le reazioni vincolari (incognite del problema) che i vincoli possono esplicare assegnandogli un verso arbitrario.
3) Si scrivono e si risolvono le tre equazioni cardinali della statica tenendo conto sia delle forze esterne che delle reazioni vincolari, da cui si calcolano le reazioni vincolari incognite.
4) Se le reazioni vincolari risultano positive vuol dire che i versi scelti arbitrariamente sono esatti, se qualcuna delle reazioni vincolari risulta negativa vuol dire che il verso scelto arbitrariamente è errato, quindi bisogna cambiargli il verso.

L'INSIEME DELLE FORZE ESTERNE APPLICATE ALLA STRUTTURA E DELLE REAZIONI VINCOLARI COSTITUISCONO UN SISTEMA DI FORZE AVENTE R = 0, M = 0 (CIOÈ EQUILIBRATO), QUINDI LA STRUTTURA È IN EQUILIBRIO.

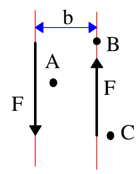
ESERCIZI SVOLTI SUI MOMENTI

1) Calcolare il momento della forza F = 2000 N rispetto ai punti A, B, C segnati in figura:



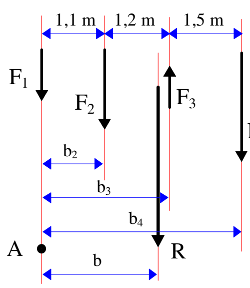
$$M_A = -(F \cdot b) = -(2000 \times 1{,}2) = -2400 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$M_B = (F \cdot b) = (2000 \times 0{,}6) = 1200 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$M_C = (F \cdot b) = (2000 \times 1{,}1) = 2100 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2) Calcolare il momento di una coppia avente F = 1500 N e braccio b = 2,5 m rispetto ai punti A, B, C segnati in figura:



Poiché il momento di una coppia di forze è costante qualunque sia il punto rispetto a cui si calcola si ha:
$M_A = M_B = M_C = -(F \cdot b) = -(1500 \times 2{,}5) = -3750 \text{ N} \cdot \text{m}$ negativo perché ha senso di rotazione antiorario

3) Calcolare la risultante del sistema di forze F1 = 1000 N, F2 = 2000 N, F3 = 500 N, F4 = 3000 N parallele, rappresentato in figura, applicando il teorema di Varignon.



Della risultante da calcolare sono noti l'intensità
$$R = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 1000 + 2000 - 500 + 3000 = 5500\text{N}$$
il verso (dall'alto in basso) e la direzione che è parallela alle direzioni delle forze componenti, ma non conosco per quale punto passa; applico il teorema di Varignon calcolando i momenti rispetto ad un punto A scelto arbitrariamente:

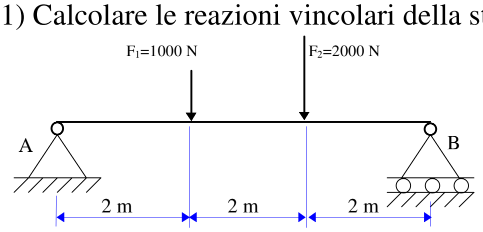
$$R \cdot b = F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4$$

dove l'incognita è il braccio b della risultante

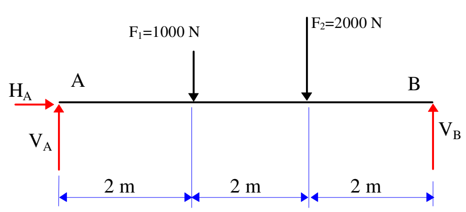
$$b = \frac{F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4}{R} = \frac{1000 \times 0 + 2000 \times 1{,}1 - 500 \times 2{,}3 + 3000 \times 3{,}8}{5500} = 2{,}26 \text{ m}$$

ESERCIZI SVOLTI SULLE REAZIONI VINCOLARI

1) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



Si tolgono i vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni che possono esplicare (ricorda che ogni vincolo esplica tante reazioni quanti sono i movimenti che impedisce).



le incognite del problema sono H_A, V_A, V_B

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale, cioè si fa la somma algebrica delle forze orizzontali applicate alla struttura (forze esterne e reazioni vincolari) assumendo come verso positivo un verso arbitrario e si uguaglia a zero.

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \; ; \quad H_A = 0$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla rotazione (si fa la somma algebrica dei momenti di tutte le forze comprese le reazioni vincolari assumendo come positivi i momenti orari) rispetto ad un punto qualsiasi del piano che conviene scegliere in uno dei vincoli per rendere nullo il momento di una delle incognite.

$$+ \quad \sum F_i \cdot b_i = 0 \qquad \text{scegliendo il punto A} \qquad \sum M_A = 0$$

$$H_A \times 0 + V_A \times 0 + F_1 \times 2 + F_2 \times 4 - V_B \times 6 = 0$$

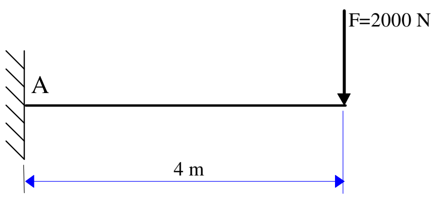
$$1000 \times 2 + 2000 \times 4 - V_B \times 6 = 0 \quad \Rightarrow V_B = \frac{10000}{6} = 1666{,}7 \text{ N}$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale, cioè si fa la somma algebrica di tutte le forze verticali applicate alla struttura (forze esterne e reazioni vincolari) e si uguaglia a zero.

$$+\uparrow \quad \sum F_y = 0 \ ; \quad V_A - F_1 - F_2 + V_B = 0 \ ; \quad V_A - 1000 - 2000 + 1666{,}7 = 0 \ ;$$

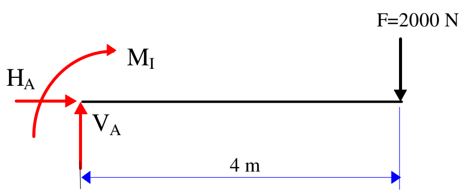
$$V_A = 1000 + 2000 - 1666{,}7 = 1333{,}3 \text{ N}$$

2) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



Si tolgono i vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni che possono esplicare (ricorda che ogni vincolo esplica tante reazioni quanti sono i movimenti che impedisce).

Le incognite del problema sono H_A, V_A, M_I



$$\xrightarrow{+} \sum F_{ix} = 0 \ ; \quad H_A = 0$$

$$+ \quad \sum M_A = 0$$

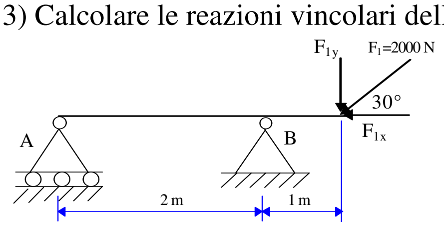
$$H_A \text{ x } 0 + V_A \text{ x } 0 + M_I + F \text{ x } 4 = 0$$

$$M_I + 2000 \text{ x } 4 = 0 \ ; \ M_I = -\ 11000 \text{ N·m}$$

Poiché il risultato è negativo, ciò vuol dire che il verso scelto per la reazione M_I è errato quindi bisogna cambiarlo

$$+\uparrow \quad \sum F_y = 0 \ ; \quad V_A - F = 0 \ ; \ V_A - 2000 = 0 \ ; \ V_A = 2000 \text{ N}$$

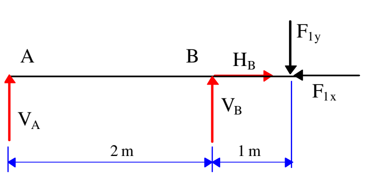
3) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



Si scompone la forza inclinata nelle sue due componenti perpendicolare e parallela all'asse della struttura:

$$F_{1x} = F_1 \cos 30° = 2000 \text{ x } \cos 30° = 1732 \text{ N}$$
$$F_{1y} = F_1 \sin 30° = 2000 \text{ x } \sin 30° = 1000 \text{ N}$$

Si tolgono i vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni che possono esplicare.
Le incognite del problema sono V_A, H_B, V_B



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \ ; \quad H_B - F_{1x} = 0 \ ; \quad H_B - 1732 = 0 \ ; H_B = 1732 \text{ N}$$

$$+ \quad \sum M_B = 0$$

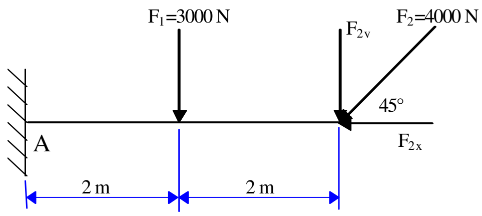
$$V_A \text{ x } 2 + H_B \text{ x } 0 + V_B \text{ x } 0 + F_{1x} \text{ x } 0 + F_{1y} \text{ x } 1 = 0$$

$$V_A \text{ x } 2 + 1732 \text{ x } 1 = 0 \qquad \Rightarrow V_A = \tfrac{-1732 \times 1}{2} = -866 \text{ N}$$

poiché il risultato è negativo, ciò vuol dire che il verso scelto per la reazione V_A è errato quindi bisogna cambiarlo

$$+\uparrow \quad \sum F_y = 0\ ;\ V_A + V_B - F_{1y} = 0$$
$$866 + V_B - 1732 = 0\ ;\quad V_B = 1732 - 866 = 866\ N$$

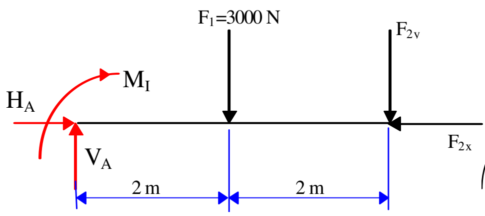
4) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



Si scompone la forza inclinata nelle sue due componenti perpendicolare e parallela all'asse della struttura:

$$F_{2x} = F_2 \cos 45° = 4000 \text{ x } \cos 45° = 2828\ N$$
$$F_{2y} = F_2 \sin 45° = 4000 \text{ x } \sin 45° = 2828\ N$$

Si tolgono i vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni che possono esplicare.



Le incognite del problema sono H_A, V_A, M_I

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0\ ;\quad H_A - F_{2x} = 0$$
$$H_A - 2828 = 0\ ;\ H_A = 2828\ N$$

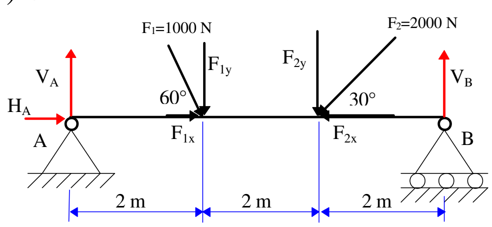
$$\curvearrowleft + \quad \sum M_A = 0$$
$$H_A \text{ x } 0 + V_A \text{ x } 0 + M_I + F_1 \text{ x } 2 + F_{2y} \text{ x } 4 + F_{2x} \text{ x } 0 = 0$$

$$M_I = -3000 \text{ x } 2 - 2828 \text{ x } 4 = -17312\ N\ m$$

poiché il risultato è negativo, ciò vuol dire cheil verso scelto per la reazione M_I è errato quindi bisogna cambiarlo

$$+\uparrow \qquad \sum F_{iy} = 0$$
$$V_A - F_1 - F_{2x} = 0\ ;\ V_A - 3000 - 2828 = 0\ ;\ V_A = 5828\ N$$

5) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



le incognite del problema sono H_A, V_A, V_B

$$F_{1x} = F_1 \cos 60° = 1000 \times \cos 60° = 500\ N$$
$$F_{1y} = F_1 \sin 60° = 1000 \times \sin 60° = 866\ N$$
$$F_{2x} = F_2 \cos 30° = 2000 \times \cos 30° = 1732\ N$$
$$F_{2y} = F_2 \sin 30° = 2000 \times \sin 30° = 1000\ N$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale, cioè si fa la somma algebrica delle forze orizzontali applicate alla struttura (forze esterne e reazioni vincolari) e si uguaglia a zero.

$$\sum F_{ix} = 0\ ;\quad H_A + F_{1x} - F_{2x} = 0\ ;\ H_A + 500 - 1732 = 0\ ;\quad H_A = 1232\ N$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto ad un punto qualsiasi del piano che conviene scegliere in uno dei vincoli per rendere nullo il momento di una delle incognite.

$$\sum F_i \cdot b_i = 0 \qquad \text{scegliendo il punto A} \qquad \sum M_A = 0$$

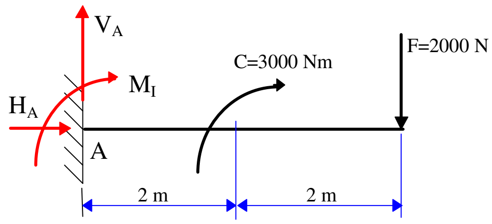
$$H_A \times 0 + V_A \times 0 + F_{1x} \times 0 + F_{1y} \times 2 + F_{2y} \times 4 + F_{2x} \times 0 - V_B \times 6 = 0$$
$$866 \times 2 + 1000 \times 4 - V_B \times 6 = 0 \qquad \Rightarrow V_B = \frac{866 \times 2 + 1000 \times 4}{6} = 955{,}33 N$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale, cioè si fa la somma algebrica di tutte le forze verticali applicate alla struttura (forze esterne e reazioni vincolari) e si uguaglia a zero.

$$\sum F_{iy} = 0\ ;\quad V_A - F_{1y} - F_{2y} + V_B = 0\ ;\quad V_A - 866 - 1000 + 955{,}33 = 0\ ;$$

$$V_A = 866 + 1000 - 955{,}33 = 910{,}67 \text{ N}$$

6) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



$\sum F_{ix} = 0$

$H_A = 0$

$\sum M_A = 0$

$H_A \times 0 + V_A \times 0 + M_I + C + F \times 4 = 0$

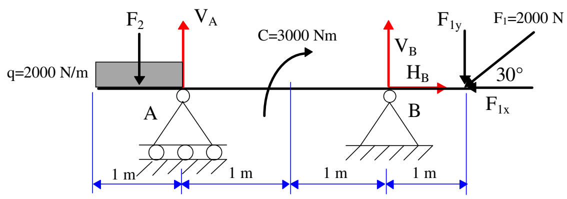
$M_I + 3000 + 2000 \times 4 = 0$; $M_I = - 11000$ Nm

il verso scelto per la reazione M_I è errato quindi bisogna cambiarlo

$\sum F_{iy} = 0$

$V_A - F = 0$; $V_A - 2000 = 0$; $V_A = 2000$ N

7) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



il carico distribuito si riduce ad un carico concentrato applicato nel baricentro

$F_2 = q \times l = 2000 \times 1 = 2000$ N

$F_{1x} = F_1 \cos 30° = 2000 \times \cos 30° = 1732$ N

$F_{1y} = F_1 \sin 30° = 2000 \times \sin 30° = 1000$ N

$\sum F_{ix} = 0$; $H_B - F_{1x} = 0$; $H_B - 1732 = 0$; $H_B = 1732$ N

$\sum M_B = 0$

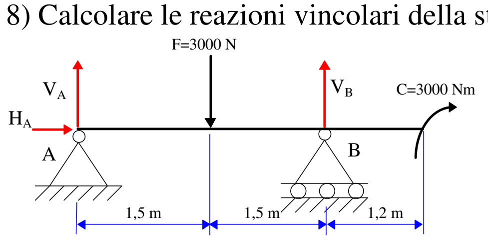
$- F_2 \times 2,5 + V_A \times 2 + C + H_B \times 0 + V_B \times 0 + F_{1x} \times 0 + F_{1y} \times 1 = 0$

$- 2000 \times 2,5 + V_A \times 2 + 1000 + 1732 \times 1 = 0 \quad \Rightarrow V_A = \frac{2000 \times 2,5 - 1000 - 1732 \times 1}{2} = 1134\text{N}$

$\sum F_{iy} = 0$; $- F_2 + V_A + V_B - F_{1y} = 0$

$- 2000 + 1134 + V_B - 1732 = 0$; $V_B = 2000 - 1134 + 1732 = 2598$ N

8) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



$\sum F_{ix} = 0$; $H_A = 0$ N

$\sum M_A = 0$

$H_A \times 0 + V_A \times 0 + F \times 1,5 - V_B \times 3 + 3000 = 0$

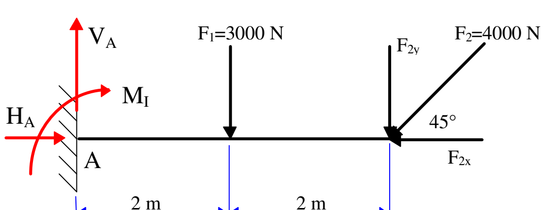
$3000 \times 1,5 - V_B \times 3 + 3000 = 0$

$V_B = \frac{3000 \times 1,5 + 3000}{3} = 2500\text{N}$

$\sum F_{iy} = 0$; $V_A - F + V_B = 0$

$V_A - 3000 + 2500 = 0$; $V_A = 500$ N

9) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



$F_{2x} = F_2 \cos 45° = 4000 \times \cos 45° = 2828$ N

$F_{2y} = F_2 \sin 45° = 4000 \times \sin 45° = 2828$ N

$\sum F_{ix} = 0$; $H_A - F_{2x} = 0$

$H_A - 2828 = 0$; $H_A = 2828$ N

$\sum M_A = 0$

$H_A \times 0 + V_A \times 0 + M_I + F_1 \times 2 + F_{2y} \times 4 + F_{2x} \times 0 = 0$

$M_I + 3000 \times 2 - 2828 \times 4 = -17312$ Nm

il verso scelto per la reazione M_I è errato quindi bisogna cambiarlo

$\sum F_{iy} = 0$

$V_A - F_1 - F_{2x} = 0$; $V_A - 3000 - 2828 = 0$; $V_A = 5828$ N