RESISTENZA DEI MATERIALI

(Distillazione verticale)

OBIETTIVI: **A**) Conosenza e comprensione dei fondamenti della resistenza dei materiali.
B) Capacità di rappresentare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazioni in semplici strutture isostatiche.
C) Capacità di verificare e/o progettare semplici organi meccanici.

- Sollecitazioni esterne (def.)
- Deformazione (def.)
- Tensioni unitarie interne (def.)
    - Normali (def.)
    - Tangenziali (def.)
        - Unità di misura
- Legge di HOOKE (enunciato)
    - Condizioni di validità
        - Regime elastico proporzionale (def.)
        - Omogeneità (def.)
        - Isotropia (def.)
- Trave (def.)
- Principio di sovrapposizione degli effetti (enunciato)
- Caratteristiche di sollecitazioni (def.)
    - Sistema piano (descr.)
        - Convenzione sui segni (descr.)
- Carico unitario di rottura: *tensione di rottura* (def.)
- Carico unitario di sicurezza: *tensione ammissibile* (def.)
    - Unità di misura
- Grado di sicurezza (def.)

SOLLECITAZIONI SEMPLICI

- Sforzo normale (def.)
    - Deformazioni (descr.)
    - Tensioni: *tipo e distribuzione* (descr.)
    - Equazione di stabilità o di equilibrio (formula)
    - Calcolo di verifica (formula)
    - Calcolo di progetto (formula)
    - Legge di Hooke per tensioni normali (formula)
    - Calcolo deformazione (formula)
    - Rappresentazione diagramma della sollecitazione (procedura + calcolo)
- Compressione per dilatazione termica impedita (appl.)
    - Calcolo di verifica (formula)
- Recipienti cilindrici in pressione (appl.)
    - Calcolo di verifica (formula)
    - Calcolo di progetto (formula)

- Flessione retta (def.)
    - Deformazioni (descr.)
    - Asse di sollecitazione (def.)
    - Asse neutro (def.)
        - Condizioni per la flessione retta (def.)
    - Calcolo deformazione (dimostr. + formula)
    - Tensioni: *tipo e distribuzione* (descr.)
    - Equazione di stabilità (dimostr. + formula)
    - Modulo di resistenza a flessione (def. + formula)
        - per sezioni: rettangolare, circolare, circolare cava (calcolo)
    - Calcolo di verifica (formula)
    - Calcolo di progetto (formula)
    - Rappresentazione diagramma della sollecitazione (procedura + calcolo)

- Taglio (def.)
    - Deformazioni (descr.)
    - Tensioni: *tipo e distribuzione* (descr.)
    - Equazione di stabilità (formula)
    - Calcolo di verifica e di progetto:
        - per sezione rettangolare (formule)
        - per sezione circolare (formule)
    - Rappresentazione diagramma della sollecitazione (procedura + calcolo)

- Torsione (def.)
    - Deformazioni (descr. + calcolo)
    - Tensioni: *tipo e distribuzione* (descr.)
    - Legge di Hooke per tensioni tangenziali (formula)
    - Equazione di stabilità (dimostr. + formula)
    - Modulo di resistenza a torsione (def. + formula)
        - per sezioni: circolari piene e cave (calcolo)
    - Calcolo di verifica (formula)
    - Calcolo di progetto (formula)
    - Rappresentazione diagramma della sollecitazione (procedura + calcolo)

SOLLECITAZIONI COMPOSTE

- Flessotorsione (def.)
    - Tensioni: *tipo e distribuzione* (descr.)
    - Tensione normale ideale (formula)
    - Momento flettente ideale (formula)
    - Calcolo di verifica (formula)
    - Calcolo di progetto (formula)

Abbandonando l'ipotesi di corpo rigido, una qualsiasi struttura vincolata, sottoposta a delle forze esterne, per l'effetto di tali forze e delle reazioni vincolari si deforma. Tali deformazioni che tendono ad allungare o ad accorciare o a fare scorrere il materiale, fanno nascere all'interno del materiale delle reazioni elastiche (TENSIONI INTERNE) che contrastano le deformazioni. Ad una situazione di sollecitazione esterna si oppone uno stato di tensione interna.

SOLLECITAZIONI ESTERNE: sono le azioni compiute dall'insieme dei carichi esterni e delle reazioni vincolari.

DEFORMAZIONE: è la variazione di forma della struttura causata dalle sollecitazioni esterne.

TENSIONI UNITARIE INTERNE: sono forze di reazione elastica che nascono in ogni punto all'interno del materiale, tendenti ad opporsi alla deformazione; vengono dette unitarie perché sono riferite all'unità di superficie (1 mm^2).

In generale, le tensioni interne hanno direzione qualsiasi, ma si può pensare di scomporre ogni tensione in due componenti: una perpendicolare (normale) al piano della sezione della struttura, l'altra secondo il piano della sezione.

TENSIONI NORMALI: sono le componenti delle tensioni perpendicolari al piano della sezione, tendenti ad opporsi agli allungamenti/accorciamenti; vengono indicate con la lettera greca σ (sigma) e hanno l'unità di misura di una forza su una superficie (N/mm^2).

TENSIONI TANGENZIALI: sono le componenti delle tensioni che giacciono sul piano della sezione, tendenti ad opporsi agli scorrimenti; vengono indicate con la lettera greca τ (tau) e hanno l'unità di misura di una forza su una superficie (N/mm^2).

LEGGE DI HOOKE: le deformazioni sono proporzionali alle forze che le hanno prodotte.

CONDIZIONI DI VALIDITÀ: la legge di Hooke esprime un legame di tipo lineare (equazione di una retta) tra deformazioni e tensioni interne, ma perché sia valida deve accadere.

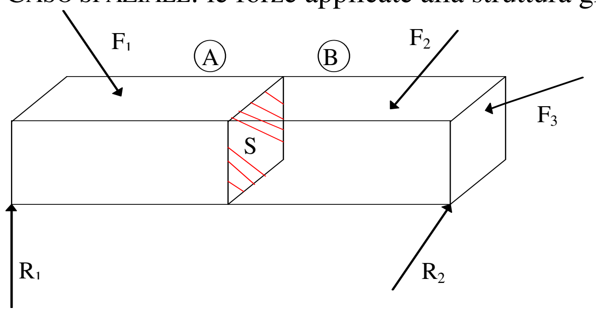
- il materiale deve lavorare in regime elastico proporzionale, cioè al cessare dei carichi che hanno prodotto la deformazione, riprende la configurazione indeformata, quindi non devono esserci deformazioni permanenti nel materiale;
- il materiale deve essere omogeneo, cioè presenta in ogni punto le stesse caratteristiche;
- il materiale deve essere isotropo, cioè avere le stesse caratteristiche in qualsiasi direzione.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI: l'effetto prodotto da più forze è equivalente alla somma degli effetti prodotti dalle singole forze agendo separatamente.

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONI: sono gli effetti, in ogni sezione della struttura, prodotti dalle sollecitazioni esterne; possono essere considerate come le azioni (forze generalizzate: forze e momenti) trasmesse attraverso una sezione generica S di una delle parti della struttura idealmente tagliata lungo la sezione S per garantire l'equilibrio di ogni singola parte.

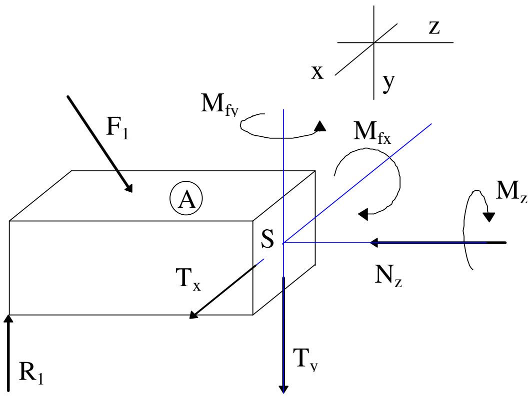
TRAVE: solido di materiale elastico, omogeneo, isotropo, generato dalla traslazione lungo un asse di una figura piana di forma qualsiasi, di area costante o gradualmente variabile. La trave è il modello di calcolo utilizzato nella verifica o nel progetto di una qualsiasi struttura in cui la misura di una delle dimensioni è prevalente rispetto alle altre due.

CASO SPAZIALE: le forze applicate alla struttura giacciono su piani diversi.



Immaginiamo di spezzare idealmente la struttura lungo la sezione S ottenendo i due tronchi A e B. Poiché la struttura nel complesso è in equilibrio, anche ogni sua parte lo deve essere; in particolare il tronco A da solo sarà in equilibrio se aggiungiamo le azioni che, lungo la sezione S, il tronco B trasmette al tronco A. Tali azioni sono proprio le caratteristiche della sollecitazione che nel caso spaziale sono 6 (3 forze + 3 momenti):

N_z , T_x , T_y , M_x , M_y , M_z



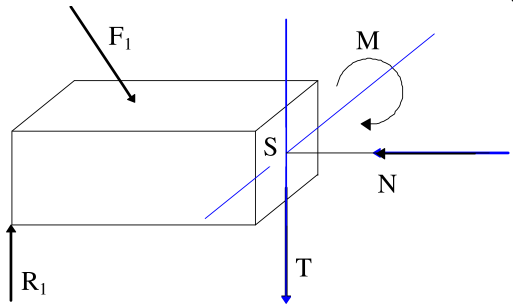
N_z sforzo normale diretto lungo l'asse della trave.

T_x, T_y sforzi di taglio diretti lungo gli assi tangenti al piano della sezione.

M_x, M_y momenti flettenti che provocano inflessioni della struttura sui piani verticale e orizzontale.

M_z momento torcente che provoca scorrimenti angolari tra le sezioni.

CASO PIANO: le forze applicate alla struttura giacciono tutte sullo stesso piano contenente l'asse della trave, per esempio quello verticale contenente l'asse della trave. In questo caso le caratteristiche della sollecitazione sono 3 (2 forze + 1 momento): N, T, M.



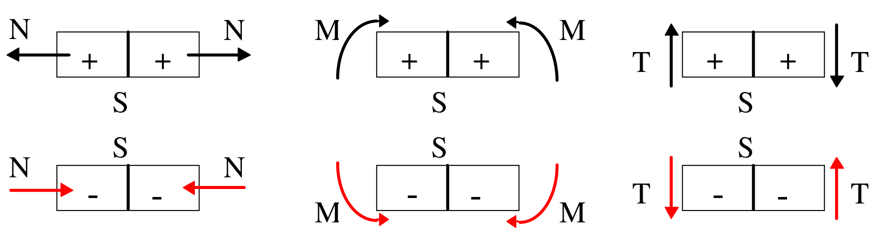
N SFORZO NORMALE

T SFORZO DI TAGLIO

M MOMENTO FLETTENTE.

CONVENZIONE SUI SEGNI: viene adottata la seguente convenzione sui segni delle caratteristiche delle sollecitazioni.

SFORZO NORMALE MOMENTO FLETTENTE TAGLIO



Esempio: guardando a destra della sezione considerata S si ha: sforzo normale positivo se la forza ha verso che si allontana dalla sezione; momento flettente positivo se ha verso antiorario; taglio positivo se la forza ha verso verso il basso.

Guardando a sinistra della sezione considerata S si ha: sforzo normale negativo se la forza ha verso che si avvicina dalla sezione; momento flettente negativo se ha verso antiorario; taglio negativo se la forza ha verso verso il basso.

CARICO UNITARIO DI ROTTURA: è la tensione che provoca la rottura del materiale quando viene sottoposto a trazione o a compressione; si misura in N/mm^2.

CARICO UNITARIO DI SICUREZZA: è la massima tensione a cui il materiale può essere sottoposto entro i limiti di sicurezza. Si calcola dividendo il carico unitario di rottura per un coefficiente chiamato grado di sicurezza:

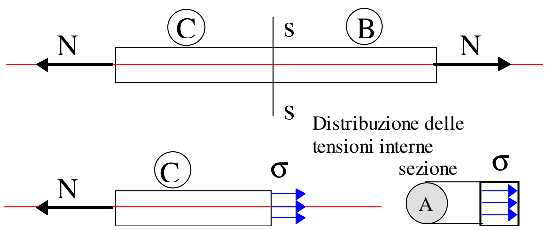
$$\sigma_{am.} = \frac{\sigma_R}{a} \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) \quad \begin{cases} a = 2{,}5 \div 3 & \text{per acciai e leghe leggere prodotti con lavorazioni plastiche} \\ a = 3 \div 4 & \text{per acciai prodotti per fusione} \\ a = 5 \div 8 & \text{per ghisa e materiali fragili prodotti per fusione.} \end{cases}$$

La tensione massima ammissibile σ_{am} è il riferimento per i calcoli di verifica e di progetto.

GRADO DI SICUREZZA $a = \dfrac{\sigma_R}{\sigma_{am.}}$: è il rapporto tra il carico unitario capace di provocare la rottura o intollerabili deformazioni della struttura e il carico unitario massimo prevedibile su di essa.

SFORZO NORMALE

Un corpo è sollecitato a sforzo normale quando le forze agenti su di esso (carichi esterni + reazioni vincolari) hanno la direzione dell'asse del corpo. Nel caso di forze che provocano allungamenti lo sforzo normale si chiama TRAZIONE (caratteristica della sollecitazione assunta convenzionalmente positiva); nel caso di forze che provocano accorciamenti lo sforzo normale si chiama COMPRESSIONE (caratteristica della sollecitazione assunta convenzionalmente negativa).
Nello sforzo normale la distribuzione delle deformazioni è uniforme (considerando valida l'ipotesi di sezioni che si conservano piane) e quindi è uniforme anche la distribuzione delle tensioni interne sulla sezione. La forma della sezione non ha influenza sul calcolo delle deformazioni e delle tensioni.



Le tensioni interne sono solo di tipo σ e con le forze esterne applicate nel tronco C formano un sistema di forze equilibrato; quindi per l'equilibrio del tronco A si ha: EQUAZIONE DI STABILITÀ

$$N = \sigma \cdot A \quad \begin{cases} \text{N sollecitazione di sforzo normale (N)} \\ \sigma \text{ tensione normale interna } \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) \\ \text{A area della sezione resistente (mm}^2\text{)} \end{cases}$$

CALCOLO DI VERIFICA

Sono note le dimensioni geometriche (sezione) e si accerta per confronto che la tensione effettiva sulla sezione risulti entro i limiti di sicurezza, fissati con il carico unitario ammissibile.

$$\sigma = \frac{N}{A} \le \sigma_{am.} \quad \begin{cases} \text{N sforzo normale nella sezione più sollecitata (N)} \\ \text{A area della sezione resistente (mm}^2\text{)} \\ \sigma \text{ tensione interna nella sezione più sollecitata } \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) \end{cases}$$

CALCOLO DI PROGETTO

Scelto il materiale della struttura si calcola l'area minima necessaria (condizione di economia) imponendo alle tensioni interne il massimo valore ammissibile (condizione di sicurezza).

$$A = \frac{N}{\sigma_{am.}} \quad \begin{cases} \text{N sforzo normale nella sezione più sollecitata (N)} \\ \sigma_{am.} \text{ tensione massima ammissibile per il materiale utilizzato } \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right) \\ \text{A area minima della sezione resistente (mm}^2\text{)} \end{cases}$$

CALCOLO DELLA DEFORMAZIONE

Si tratta di allungamenti nel caso di trazione e di accorciamenti nel caso di compressione. Per la legge di Hooke nel caso di tensioni normali si ha:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \begin{cases} E \text{ modulo di elasticità longitudinale del materiale } \left(\frac{N}{mm^2}\right) \\ \varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} \text{ allungamento unitario} \end{cases}$$

ma si ha: $$\left.\begin{array}{l} \sigma = \dfrac{N}{A} \\ \varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$

La deformazione è proporzionale allo sforzo normale e alla lunghezza iniziale; è inversamente proporzionale all'area della sezione resistente e al modulo di elasticità longitudinale del materiale.

PROCEDURA PER IL CALCOLO, SEZIONE PER SEZIONE, DELLA SOLLECITAZIONE DI SFORZO NORMALE (DIAGRAMMA DI SOLLECITAZIONE DI SFORZO NORMALE).

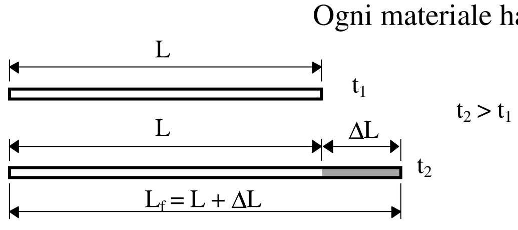
1) Si calcolano le reazioni vincolari.
2) Si calcola per ogni sezione il valore dello sforzo normale considerando tutte e solo le forze che danno sforzo normale (forze con linea d'azione coincidente o parallela all'asse della struttura) che stanno a destra o a sinistra della sezione considerata; per le sezioni dove sono applicate forze, è necessario calcolare lo sforzo normale in una sezione immediatamente a sinistra e in una immediatamente a destra del punto di applicazione della forza.
3) Si disegna il diagramma della caratteristica della sollecitazione di sforzo normale riportando su una linea di riferimento parallela all'asse della struttura i valori dello sforzo normale calcolati; si assume, convenzionalmente, positivo e si rappresenta sopra la linea di riferimento lo sforzo normale di trazione; si assume, convenzionalmente, negativo e si rappresenta sotto la linea di riferimento lo sforzo normale di compressione.

COMPRESSIONE PER DILATAZIONE TERMICA LINEARE IMPEDITA

DILATAZIONE TERMICA LINEARE: è il fenomeno fisico per cui un corpo monodimensionale se riscaldato si allunga e se raffreddato si accorcia.

COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA LINEARE: è l'allungamento che subisce una barretta di lunghezza unitaria quando la sua temperatura aumenta di 1 °C.

Ogni materiale ha un suo coefficiente di dilatazione termica lineare.

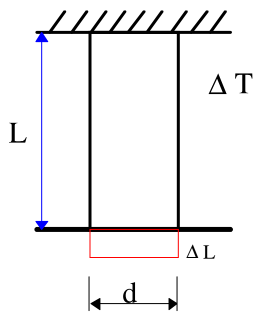


MATERIALE	COEFF. DILATAZIONE TERMICA LINEARE
acciaio	a = 0,000012 1/°C
rame	a = 0,000017 1/°C
alluminio	a = 0,000024 1/°C

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot (t_2 - t_1) \quad \begin{cases} \Delta L \text{ allungamento o accorciamento} \quad mm \\ \alpha \quad \text{coeff.dilatazione termica lineare} \quad \frac{mm}{mm°C} \\ L \quad \text{lunghezza iniziale} \quad mm \\ t_2 \quad \text{temperatura finale} \quad °C \\ t_1 \quad \text{temperatura iniziale} \quad °C \end{cases} \qquad L_f = L + \Delta L$$

L'allungamento causato da un aumento di temperatura ΔT vale:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$



$L \leq 10\ d$

ma poiché tale allungamento risulta impedito, si può paragonare ad un accorciamento causato da una sollecitazione di sforzo normale di compressione N:

$\Delta L = \dfrac{N \cdot L}{E \cdot A}$ essendo uguali i primi membri, saranno uguali i secondi membri

$\dfrac{N \cdot L}{E \cdot A} = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$ dividendo ambo i membri per L

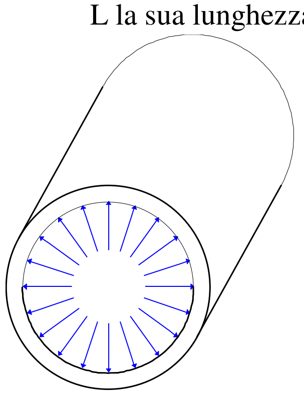
$\dfrac{N}{E \cdot A} = \alpha \cdot \Delta T \Rightarrow \dfrac{N}{A} = \alpha \cdot E \cdot \Delta T$ ma $\dfrac{N}{A} = \sigma \Rightarrow$

$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta T$ tensione normale di compressione dovuta a ΔT

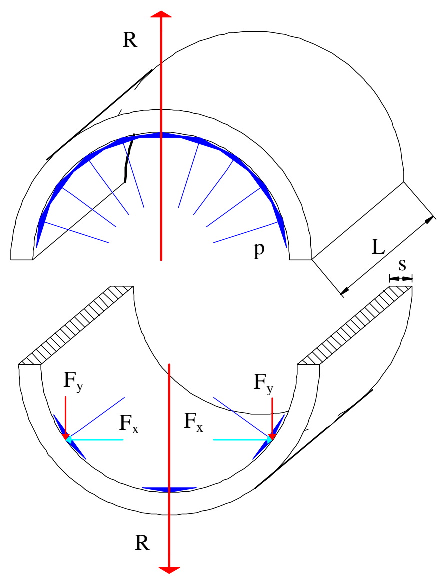
Per la verifica deve essere $\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta T \leq \sigma_{am.}$

RECIPIENTI CILINDRICI IN PRESSIONE

Sia p la pressione interna del recipiente in N/ mm^2;
D il suo diametro interno in mm;
s lo spessore del recipiente in mm;
L la sua lunghezza in mm.



Le forze di pressione hanno direzione perpendicolare alla superficie su cui agiscono e sono dirette verso l'esterno.
Consideriamo un piano longitudinale diametrale qualsiasi; tale piano divide in due parti simmetriche il recipiente cilindrico.
Scomponendo tutte le forze secondo le direzioni verticale e orizzontale (nel caso di piano diametrale orizzontale), si nota che per la simmetria della struttura, le forze orizzontali si annullano.
La FORZA che tende a staccare i due semicilindri è data dalla somma delle forze verticali che vale:



$$R = \sum F_y = p \cdot D \cdot L$$

La SEZIONE RESISTENTE che si oppone a tale distacco vale: $A = 2\ (s\ L)$
La TENSIONE cui è sottoposto il materiale del recipiente vale:

$$\sigma = \frac{R}{A} = \frac{p \cdot D \cdot L}{2 \cdot s \cdot L} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot s}$$

Per la verifica deve essere: $\sigma = \dfrac{p \cdot D}{2 \cdot s} \leq \sigma_{am.}$

Per il progetto si calcola: $s = \dfrac{p \cdot D}{2 \cdot \sigma_{am.}}$

Per pressioni non molto elevate, il valore di s calcolato risulta molto piccolo e ciò può provocare deformazioni nella messa in opera; i manuali tecnici consigliano di aggiungere al valore s calcolato

1÷3 mm per recipienti in acciaio
6÷10 mm per recipienti in ghisa o bronzo.

FLESSIONE RETTA

Una struttura è soggetta a flessione semplice quando i carichi esterni sono costituiti da due coppie uguali e opposte di momento M giacenti in un piano che contiene l'asse longitudinale della struttura.

PIANO DI SOLLECITAZIONE: è il piano su cui giacciono i carichi che provocano flessione.

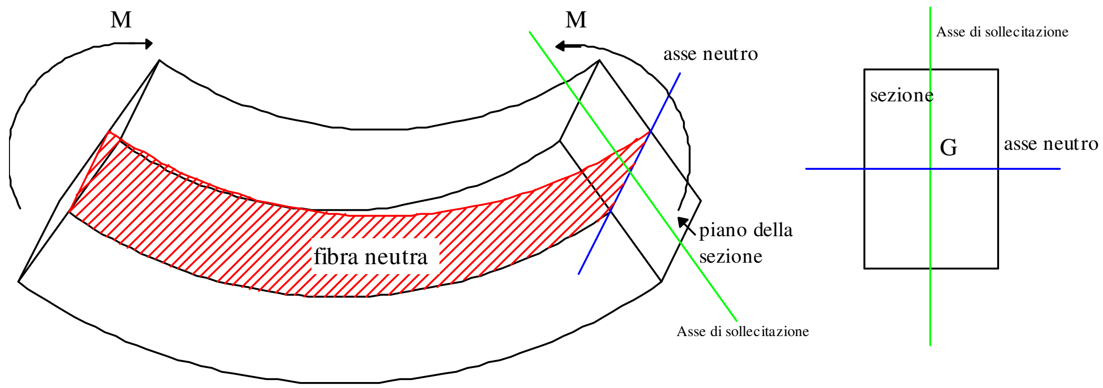
ASSE DI SOLLECITAZIONE: è la retta intersezione tra il piano di sollecitazione e il piano della sezione della struttura.

FLESSIONE RETTA: se la sezione ha un asse di simmetria e l'asse di sollecitazione coincide con esso.
La sollecitazione di flessione provoca un incurvamento della trave: le sezioni ruotano, restando piane; le fibre in parte si allungano, in parte si accorciano, quindi ci sarà uno strato che non subirà alcuna deformazione.

STRATO NEUTRO: è lo strato di fibre che non subisce deformazioni.

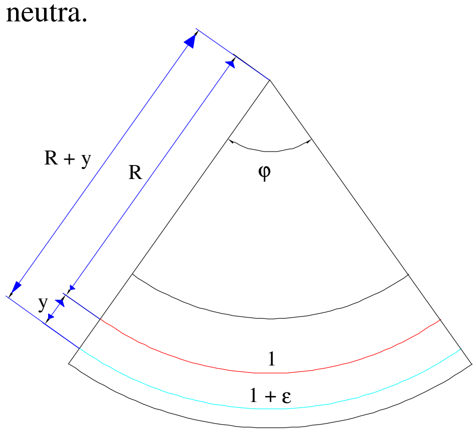
ASSE NEUTRO: è l'asse generato dall'intersezione dello strato neutro con il piano delle sezione; attorno a tale asse ruota ogni sezione e le fibre collocate su di esso non subiscono ne allungamenti ne accorciamenti.

Nella flessione retta, asse di sollecitazione e asse neutro sono perpendicolari e si intersecano nel baricentro della sezione.



DEFORMAZIONI

L'incurvamento della trave fa sì che il suo asse e ogni sua fibra diventino archi di circonferenza.
Consideriamo un tratto di trave deformata di lunghezza unitaria (la lunghezza si mantiene unitaria solo lungo il piano neutro). Sia y la distanza di una fibra generica dalla fibra neutra.



$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{R}\\ \varphi &= \frac{1+\varepsilon}{R+y}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1+\varepsilon}{R+y} = \frac{1}{R} \; ; \; 1+\varepsilon = \frac{R+y}{R} \; ; \; \varepsilon = \frac{R+y}{R} - 1$$

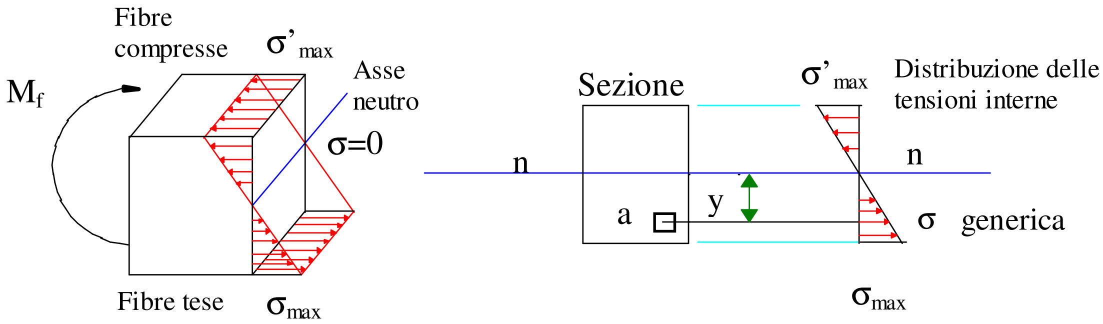
$$\varepsilon = \frac{y}{R}$$

La deformazione unitaria di allungamento o accorciamento delle varie fibre è proporzionale alla distanza y dall'asse neutro e alla curvatura 1/R dell'asse deformato della trave (LINEA ELASTICA).

TENSIONI

La sollecitazione di flessione provoca in ogni sezione tensioni normali (σ), verificandosi nella struttura deformazioni di allungamento (trazione) e deformazioni di accorciamento (compressione). Dette tensioni sono massime negli strati più lontani dall'asse neutro perché sono massime le deformazioni e nulle in corrispondenza dell'asse neutro perché sono nulle le deformazioni.

Per l'equilibrio tra tensioni interne e sollecitazioni si ha:



Per l'equilibrio alla traslazione:

$$\sum \sigma \cdot a = 0 \qquad \text{ma} \qquad \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{R} \qquad \text{sostituendo}$$

$$\sum E \cdot \frac{y}{R} \cdot a = 0 \quad ; \quad \frac{E}{R} \cdot \sum y \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum y \cdot a = 0$$

ciò vuol dire che il momento statico della sezione rispetto all'asse neutro vale zero, quindi l'asse neutro è baricentrico.

Per l'equilibrio alla rotazione:

$$\sum \sigma \cdot a \cdot y = M \qquad \text{ma} \qquad \sigma = E \cdot \frac{y}{R} \qquad \text{sostituendo}$$

$$\sum E \cdot \frac{y}{R} \cdot a \cdot y = M \quad ; \quad \frac{E}{R} \cdot \sum a \cdot y^2 = M \qquad \text{ma} \qquad \sum a \cdot y^2 = J_n \ \text{momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro}$$

$$\frac{E}{R} \cdot J_n = M \quad ; \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot J_n} \qquad \text{equazione di deformazione ; sostituendo tale espressione si ha:}$$

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{R} = E \cdot y \frac{M}{E \cdot J_n} = M \frac{y}{J_n}$$

$$\sigma = M \frac{y}{J_n} \qquad \text{equazione che esprime il valore della tensione in un punto della sezione a distanza } y \text{ dall'asse neutro}$$

$$\sigma_{max} = M \frac{y_{max}}{J_n} \qquad \text{tensione massima nella sezione}$$

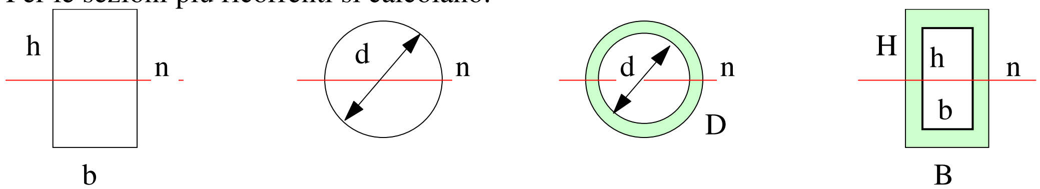
MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE: è dato dal rapporto tra il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro e la distanza dall'asse neutro delle fibre più tese o più compresse: dipende solo dalla geometria della sezione ed ha le dimensioni di una lunghezza al cubo (mm^3).

$$W_f = \frac{J_n}{y_{max}} \quad \left(mm^3\right)$$

Quindi

$$\sigma_{max} = M \frac{y_{max}}{J_n} = \frac{M}{W_f}$$

Per le sezioni più ricorrenti si calcolano:



$$W_f = \frac{b \cdot h^2}{6} \qquad W_f = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \qquad W_f = \frac{\pi \cdot \left(D^3 - d^3\right)}{32} \qquad W_f = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6H}$$

CALCOLO DI VERIFICA

Sono note le dimensioni geometriche (sezione e lunghezza) e si accerta per confronto che la tensione effettiva sulla sezione risulti entro i limiti di sicurezza, fissati con il carico unitario ammissibile.

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_f} \le \sigma_{am.} \qquad \text{tensione massima di trazione}$$

$$\sigma'_{max} = \frac{M}{W'_f} \le \sigma'_{am.} \qquad \text{tensione massima di compressione}$$

CALCOLO DI PROGETTO

Scelto il materiale della struttura si calcola l'area minima necessaria (condizione di economia) imponendo alle tensioni interne il massimo valore ammissibile (condizione di sicurezza).

$$W_f = \frac{M}{\sigma_{am.}}$$ noto il valore di W_f si calcolano le dimensioni della sezione

Per la verifica e per il progetto si considera sempre la sezione più sollecitata, cioè la sezione dove è massimo il momento flettente. Quindi risulta necessario conoscere quanto vale la sollecitazione di momento flettente in ogni sezione della struttura. Ciò è possibile rappresentando il diagramma della sollecitazione di momento flettente della struttura.

PROCEDURA PER IL CALCOLO, SEZIONE PER SEZIONE, DELLA SOLLECITAZIONE DI MOMENTO FLETTENTE (DIAGRAMMA DI SOLLECITAZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE).

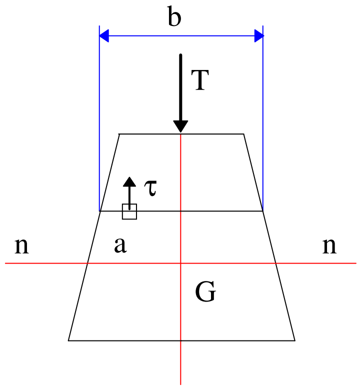
1) Si calcolano le reazioni vincolari.
2) Si calcola per ogni sezione il valore del momento flettente considerando tutte e solo le forze che danno momento che stanno a destra o a sinistra della sezione considerata; per le sezioni dove sono applicati momenti, è necessario calcolare il momento flettente in una sezione immediatamente a sinistra e in una immediatamente a destra del punto di applicazione della coppia.
3) Si disegna il diagramma della caratteristica della sollecitazione di momento flettente riportando su una linea di riferimento parallela all'asse della struttura i valori dei momenti calcolati; si assume, convenzionalmente, positivo e si rappresenta sotto la linea di riferimento il momento flettente che tende le fibre inferiori; si assume, convenzionalmente, negativo e si rappresenta sopra la linea di riferimento il momento flettente che comprime le fibre superiori.

TAGLIO

Si ha sollecitazione di taglio quando sulla struttura sono applicate forze con direzione perpendicolare al suo asse, giacenti sul piano della sezione e passanti per il suo baricentro. La sollecitazione di taglio produce uno scorrimento (traslazione) fra sezioni contigue. Le tensioni interne, dovendo opporsi a tale deformazione, giacciono sul piano della sezione, quindi sono delle tensioni tangenziali τ. La sollecitazione di taglio è normalmente accompagnata dalla flessione.

Considerata una sezione qualsiasi di una struttura soggetta a taglio T , per l'equilibrio alla traslazione verticale deve accadere che $\sum \tau \cdot a = T$

Si dimostra che le tensioni interne τ lungo una corda di lunghezza b parallela all'asse neutro, hanno valore



$$\tau = \frac{T \cdot S_n^*}{b \cdot J_n}$$ EQUAZIONE DI STABILITA'

τ tensione tangenziale sulle areole "a" della sezione lungo la corda di lunghezza b.

T sollecitazione di taglio nella sezione.

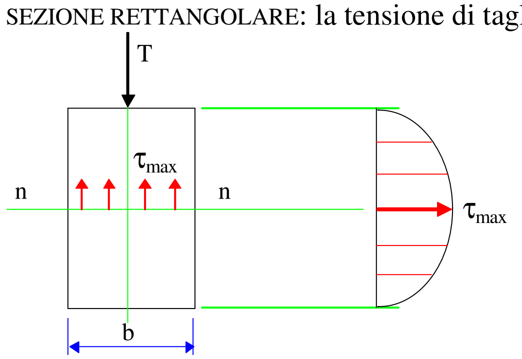
S_n^* momento statico, rispetto all'asse neutro, della parte di sezione che sta al di sopra o al di sotto della corda considerata.

b larghezza della sezione all'altezza dell'areola "a".

J_n momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro.

Le tensioni non sono distribuite in modo uniforme sulla sezione; la distribuzione delle τ sulla sezione è di tipo parabolico per sezioni rettangolari e circolari. Si dimostra che per

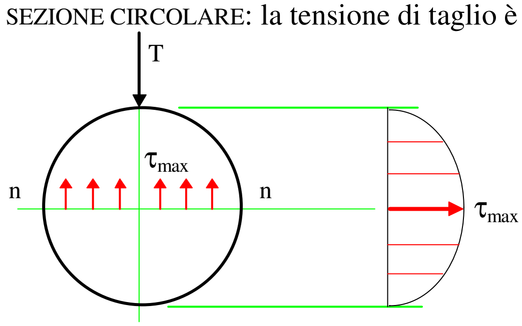
SEZIONE RETTANGOLARE: la tensione di taglio è massima lungo l'asse neutro e si dimostra che vale



$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} \quad \begin{cases} T \text{ sforzo di taglio nella sezione (N)} \\ A \text{ area della sezione resistente } (mm^2) \end{cases}$$

$$\frac{T}{A} = \tau_{media}$$ tensione media di taglio nella sezione

SEZIONE CIRCOLARE: la tensione di taglio è massima lungo l'asse neutro e si dimostra che vale



$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{T}{A} \quad \begin{cases} T \text{ sforzo di taglio nella sezione (N)} \\ A \text{ area della sezione resistente } (mm^2) \end{cases}$$

$$\frac{T}{A} = \tau_{media}$$ tensione media di taglio nella sezione

Le tensioni da taglio hanno generalmente un'importanza secondaria in presenza di altre tensioni, per cui non è in base ad essa che vengono dimensionati gli organi meccanici. E' sufficiente una verifica confrontando la τ_{max} con la $\tau_{am.}$.

$$\tau_{max} \le \tau_{am.} \qquad \text{con} \qquad \tau_{am.} = \frac{\sigma_{am.}}{\sqrt{3}}$$

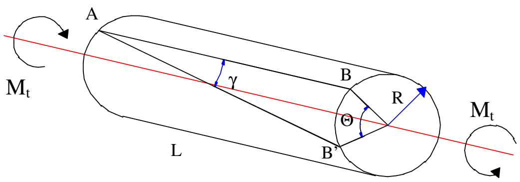
Nei pochi casi di strutture soggette a taglio puro (chiodature, collegamenti con linguetta), si introduce l'ipotesi semplificativa di distribuzione uniforme delle tensioni da taglio sulla sezione, ciò equivale a considerare la $\tau_{media} = \frac{T}{A}$ e quindi per la VERIFICA: $\tau_{media} = \frac{T}{A} \le \tau_{am.}$

PROGETTO: $A = \frac{T}{\tau_{am.}}$

TORSIONE NELLE SEZIONI CIRCOLARI PIENE E CAVE

Un solido è soggetto a torsione quando su di esso sono applicati, alle estremità, momenti uguali e opposti attorno al suo asse longitudinale e quindi giacenti sul piano della sezione.

DEFORMAZIONE: le sezioni ruotano una rispetto all'altra attorno all'asse longitudinale dell'angolo di torsione Θ e si mantengono piane (vale solo per sezioni circolari piene e cave), mentre ogni fibra si deforma secondo un tratto di elica.



Θ angolo di torsione, γ angolo di scorrimento — espressi in radianti

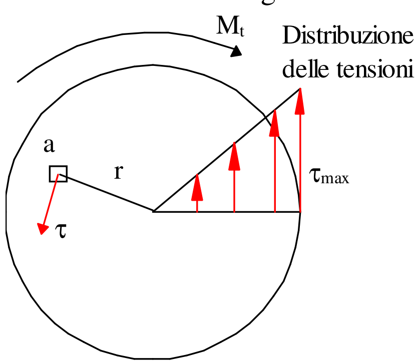
$$\left.\begin{array}{ll}\text{arco} & BB' = L\cdot\gamma \\ \text{arco} & BB' = R\cdot\Theta\end{array}\right\} \Rightarrow L\cdot\gamma = R\cdot\Theta \Rightarrow \gamma = \frac{R\cdot\Theta}{L}$$

TENSIONI: dovendo opporsi a deformazioni di scorrimento, giacciono sul piano della sezione, quindi sono delle tensioni tangenziali t e poiché le deformazioni crescono dal centro alla periferia, le tensioni saranno massima lungo il bordo della sezione e nulle sul centro della sezione.

Dalla legge di Hooke per tensioni tangenziali

$$\tau = G\cdot\gamma \qquad \text{con} \quad G = \frac{2}{5}\cdot E \qquad \text{modulo di elasticità tangenziale} \left(\frac{N}{mm^2}\right)$$

Per una area unitaria generica della sezione "a" posta a distanza r dal centro si ha:



$$\left.\begin{array}{l}\tau = G\cdot\gamma \\ \gamma = \dfrac{r\cdot\Theta}{L}\end{array}\right\} \Rightarrow \tau = G\cdot\frac{r\cdot\Theta}{L}$$

Poiché nell'espressione di τ varia solo r (distanza tra area "a" elementare e centro della sezione), la tensione tangenziale varia linearmente dal centro dove è nulla, fino al bordo, dove è massima e tali tensioni sono disposte secondo direzioni tangenti a circonferenze concentriche.

Per l'equilibrio alla rotazione

$$\sum \tau\cdot a\cdot r = M_t \qquad \text{ma} \quad \tau = G\cdot\frac{r\cdot\Theta}{L} \qquad \text{sostituendo}$$

$$\sum G\cdot\frac{r\cdot\Theta}{L}\cdot a\cdot r = M_t \ ; \quad G\cdot\frac{\Theta}{L}\cdot\sum a\cdot r^2 = M_t \quad \text{ma} \ \sum a\cdot r^2 = J_p$$

momento d'inerzia polare della sezione rispetto al suo baricentro

$$G\cdot\frac{\Theta}{L}\cdot J_p = M_t \ ; \qquad \Theta = \frac{M_t\cdot L}{G\cdot J_p} \qquad \text{ANGOLO DI TORSIONE}$$

Si è visto che

$$\tau = G\cdot\frac{r\cdot\Theta}{L} \qquad \text{ma} \quad \Theta = \frac{M_t\cdot L}{G\cdot J_p} \qquad \text{sostituendo}$$

$$\tau = G\cdot\frac{r}{L}\cdot\frac{M_t\cdot L}{G\cdot J_p} \ ; \qquad \tau = \frac{M_t\cdot r}{J_p} \qquad \text{EQUAZIONE DI STABILITA'}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t\cdot r_{max}}{J_p} = \frac{M_t\cdot R}{J_p} \qquad \text{con R raggio della sezione}$$

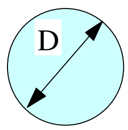
MODULO DI RESISTENZA A TORSIONE: è dato dal rapporto tra il momento d'inerzia polare della sezione rispetto al suo baricentro e il suo raggio: dipende solo dalla geometria della sezione ed ha l'unità di misura di una lunghezza al cubo (mm^3).

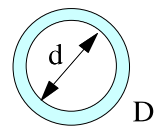
$$W_t = \frac{J_p}{R} \quad \left(mm^3\right)$$

Quindi

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot R}{J_p} = M_t \cdot \frac{R}{J_p} = \frac{M_t}{W_t}$$

Per le sezioni circolari piene e cave si calcolano:





$$W_t = \frac{J_p}{R} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

$$W_t = \frac{J_p}{R} = \frac{\frac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{16 \cdot D}$$

CALCOLO DI VERIFICA

Sono note le dimensioni geometriche (sezione) e si accerta per confronto che la tensione massima sulla sezione risulti entro i limiti di sicurezza, fissati con il carico unitario ammissibile.

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{am.} \qquad \text{con} \qquad \tau_{am.} = \frac{\sigma_{am.}}{\sqrt{3}}$$

CALCOLO DI PROGETTO

Scelto il materiale della struttura si calcola l'area minima necessaria (condizione di economia) imponendo alle tensioni interne il massimo valore ammissibile (condizione di sicurezza).

$$W_t = \frac{M_t}{\tau_{am.}}$$ noto il valore di W_t si calcola il diametro della sezione

Per la verifica e per il progetto si considera sempre la sezione più sollecitata, cioè la sezione dove è massimo il momento torcente.

FLESSOTORSIONE NELLE SEZIONI CIRCOLARI PIENE E CAVE

E' la tipica sollecitazione composta cui sono sottoposti gli alberi che trasmettono potenza. Le sezioni del solido sono sottoposte contemporaneamente a tensioni σ normali dovute alla flessione e a tensioni tangenziali τ dovute alla torsione.

Da studi sulla elasticità dei materiali, si dimostra che è possibile calcolare una tensione normale ideale σ_{id} che è equivalente, cioè che ha gli stessi effetti, delle due tensioni agenti contemporaneamente.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Nel caso di sezioni resistenti circolari piene o cave, è noto che il modulo di resistenza a torsione è il doppio del modulo di resistenza a flessione $Wt = 2\ Wf$. Da ciò è possibile calcolare un momento flettente ideale M_{fid} che ha gli stessi effetti del momento flettente e del momento torcente agenti contemporaneamente

$$M_{fid} = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

Noto il momento flettente ideale, sia per la verifica che per il progetto, si procede esattamente come nel caso della flessione.