COMPOSIZIONE E SCOMPOSIZIONE DI FORZE COMPLANARI

(Distillazione verticale)

OBIETTIVO: SAPERE OPERARE CON GRANDEZZE VETTORIALI.

PREREQUISITI:

- Risoluzione triangolo rettangolo (appl.)
  - teorema di Pitagora (enunciato + formula)
  - relazioni trigonometriche
    - seno (def + formula)
    - coseno (def + formula)
    - tangente (def + formula)

- Risoluzione triangolo qualsiasi (appl.)
  - teorema dei seni (enunciato + formula)
    - condizione di applicabilità
  - teorema di Carnot (enunciato + formula)
    - condizione di applicabilità

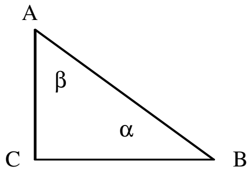
- Grandezza fisica (def.)
- Grandezze scalari e vettoriali (def + esempi)
- Vettore (def)
- Forza (def)
- Risultante (def)
- Composizione di forze aventi stessa linea d'azione (appl.)
- Composizione di due forze incidenti ortogonali (appl.)
- Composizione di due forze parallele dello stesso verso e di verso contrario (appl.)
- Scomposizione di forze secondo due linee d'azione ortogonali (appl.)
- Scomposizione di forze secondo due linee d'azione parallele (appl.)
- Composizione di forze aventi linee d'azione incidenti qualsiasi (appl.)
- Scomposizione di forze secondo due linee incidenti qualsiasi (appl.)
- Generalizzazione sulla composizione delle forze
  - poligono delle forze (appl.)
  - poligono funicolare (appl.)

COMPOSIZIONE E SCOMPOSIZIONE DI VETTORI COMPLANARI - SCHEDA DI LEZIONE

PREREQUISITI

RISOLUZIONE TRIANGOLO RETTANGOLO.

TEOREMA DI PITAGORA: in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

$\overline{AB}$ ipotenusa ; $\overline{AC}$ cateto ; $\overline{BC}$ cateto

α (alfa) angolo opposto al cateto AC

β (beta) angolo opposto al cateto BC

SENO (sin) DI UN ANGOLO: è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa.

$$\text{seno angolo} = \frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \;;\; \overline{AC} = \overline{AB}\,\sin\alpha \;;\; \overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}$$

$$\sin\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \;;\; \overline{BC} = \overline{AB}\,\sin\beta \;;\; \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\sin\beta}$$

COSENO (cos) DI UN ANGOLO: è il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo e l'ipotenusa.

$$\text{coseno angolo} = \frac{\text{cateto adiacente all'angolo}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \;;\; \overline{BC} = \overline{AB}\,\cos\alpha \;;\; \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \;;\; \overline{AC} = \overline{AB}\,\cos\beta \;;\; \overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos\beta}$$

TANGENTE (tg) DI UN ANGOLO: è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e il cateto adiacente all'angolo.

$$\text{tangente angolo} = \frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{cateto adiacente all'angolo}}$$

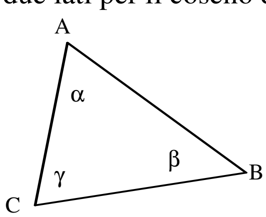
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \;;\; \overline{AC} = \overline{BC}\,\mathrm{tg}\alpha \;;\; \overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\mathrm{tg}\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \;;\; \overline{BC} = \overline{AC}\,\mathrm{tg}\beta \;;\; \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\mathrm{tg}\beta}$$

RISOLUZIONE TRIANGOLO QUALSIASI.

TEOREMA DEI SENI: in un triangolo qualunque le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

TEOREMA DI CARNOT: in un triangolo qualunque, il quadrato della misura di ogni lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso.



Teorema dei seni

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}$$

Teorema di Carnot

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos\gamma \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos\gamma}$$

GRANDEZZA FISICA: è ogni entità che si può misurare in modo inequivocabile; si distinguono in grandezze scalari e grandezze vettoriali.

GRANDEZZE SCALARI: sono grandezze la cui misura è definita da un numero e da una unità di misura.

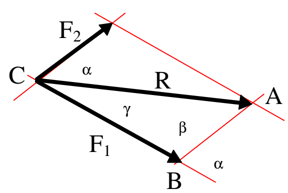
Esempi: massa (kg), lunghezza (m), tempo (s), temperatura (K).

GRANDEZZE VETTORIALI: sono grandezze rappresentate da un modulo (numero x unità di misura), da una linea d'azione (retta lungo la quale agiscono), da un verso (senso in cui agiscono).

Esempi: forza (N), peso (N), velocità (m/s), accelerazione (m/s^2).

VETTORE: è un ente geometrico (segmento) definito da linea d'azione, verso, modulo (lunghezza) e punto di applicazione.
FORZE: sono le cause che cambiano lo stato di quiete o di moto di un corpo.
SOMMARE più forze significa calcolare la risultante che è quella forza unica che produce lo stesso effetto di tutte le forze insieme, chiamate componenti.
RISULTANTE DI FORZE CONCORDI AVENTI STESSA LINEA D'AZIONE: è una forza che ha la stessa linea d'azione e lo stesso verso delle componenti e, per modulo la somma aritmetica dei moduli delle componenti.
RISULTANTE DI FORZE DISCORDI AVENTI STESSA LINEA D'AZIONE: è una forza che ha la stessa linea d'azione il verso delle forze maggiori e, il modulo uguale alla somma algebrica dei moduli delle componenti.
RISULTANTE DI DUE FORZE INCIDENTI ORTOGONALI: è la forza data dalla diagonale del rettangolo che ha per lati le forze componenti.
RISULTANTE DI DUE FORZE PARALLELE DELLO STESSO VERSO: è la forza che ha per modulo la somma dei moduli delle componenti, ha la loro linea d'azione ed il loro verso e si trova tra esse a distanza inversamente proporzionale ai loro moduli.
RISULTANTE DI DUE FORZE PARALLELE DI VERSO CONTRARIO: è la forza che ha per modulo la differenza dei moduli delle componenti, ha il verso della forza maggiore e si trova dalla sua parte, in un punto tale la cui distanza dai punti di applicazione delle componenti è inversamente proporzionale ai loro moduli.
RISULTANTE DI DUE FORZE INCIDENTI QUALSIASI: è una forza data dalla diagonale del parallelogramma che ha per lati le forze componenti.

COMPOSIZIONE DI DUE FORZE AVENTI DIREZIONI INCIDENTI QUALSIASI:



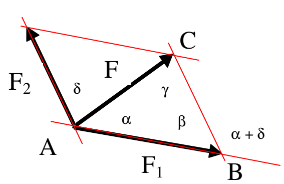
Sono noti F_1, F_2, α.
Dal triangolo ABC con $\overline{AB} = F_2$; $\overline{BC} = F_1$; $\beta = 180° - \alpha$
Si calcola: (teorema di Carnot)

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cos\beta} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos\alpha}$$

poiché $\cos\beta = -\cos\alpha$ solo quando $\alpha + \beta = 180°$, cioè quando α e β sono angoli supplementari.
Si calcola: (teorema dei seni)

$$\frac{F_2}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{F_2 \sin\beta}{R}; \quad \gamma = \arcsin(\sin\gamma)$$

SCOMPOSIZIONE DI UNA FORZA SECONDO DUE DIREZIONI INCIDENTI QUALSIASI:



Sono noti F, α, δ.
Si calcolano: $\gamma = \delta$ perché angoli alterni interni
$\beta = 180° - (\alpha + \delta)$
Dal triangolo ABC, si calcola: (teorema dei seni),

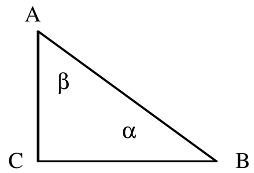
$$\frac{F}{\sin\beta} = \frac{F_1}{\sin\gamma} \Rightarrow F_1 = \frac{F\sin\gamma}{\sin\beta}$$

Si calcola: (teorema dei seni)

$$\frac{F}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\alpha} \Rightarrow F_2 = \frac{F\sin\alpha}{\sin\beta}$$

RISULTANTE DI PIÙ FORZE CONCORRENTI COMPLANARI: si può calcolare sommando due forze con la regola del parallelogramma, la risultante ottenuta si compone con lo stesso metodo alla forza successiva e così via; oppure con il metodo del poligono delle forze: il lato di chiusura del poligono rappresenta la risultante totale del sistema di forze.
Quando le forze non sono concorrenti si adottano dei metodi grafici (POLIGONO DELLE FORZE + POLIGONO FUNICOLARE).

Dato il triangolo rettangolo in figura, noti i cateti AC = 30 mm, BC = 50 mm, calcolare la misura dell'ipotenusa AB e i valori degli angoli α e β.



$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{30^2 + 50^2} = 58{,}3\text{mm}$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{30}{50} = 0{,}6$$

$$\alpha = \text{arctg}(\text{tg}\alpha) = \text{arctg}(0{,}6) = 30{,}96°$$

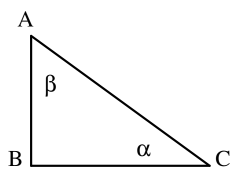
$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha = 90° - 30{,}96° = 59{,}04°$$

oppure:

$$\sin\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{50}{58{,}3} = 0{,}8576$$

$$\beta = \arcsin(\sin\beta) = \arcsin(0{,}8576) = 59{,}04°$$

In un triangolo ABC rettangolo in B sono noti il cateto AB = 60 mm e l'ipotenusa AC = 110 mm. Determinare la misura del cateto BC e i valori degli angoli α (opposto al cateto AB) e β (opposto al cateto BC).



$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{110^2 - 60^2} = 92{,}19\text{ mm}$$

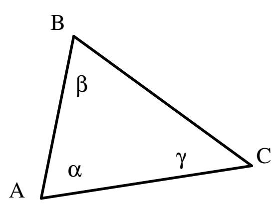
$$tg\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{60}{92{,}19} = 0{,}6508$$

$$\alpha = \text{arctg }(\text{tg}\alpha) = \text{arctg }(0{,}6508) = 33{,}05°$$

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha = 90° - 33{,}05° = 56{,}95°$$

In un triangolo qualunque sono noti due lati AB = 40 mm, BC = 60 mm e l'angolo fra essi compreso β = 65°. Calcolare AC, α, γ.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos\beta} = \sqrt{40^2 + 60^2 - 2 \times 40 \times 60 \times \cos 65°} = 56{,}31\text{ mm}$$



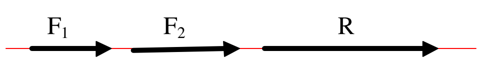
$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC \cdot \sin\beta}{AC} = \frac{60 \cdot \sin 65°}{56{,}31} = 0{,}9657$$

$$\alpha = \text{arcosin}\left(\sin\alpha\right) = \text{arcosin}\left(0{,}9567\right) = 74{,}95°$$

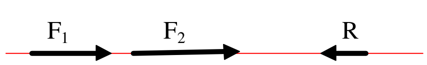
$$\gamma = 180° - \left(\alpha + \beta\right) = 180° - \left(74{,}95° + 65°\right) = 40{,}05°$$

ESERCIZI SULLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE

Determinare la somma e la differenza delle forze F_1 = 2000 N ed F_2 = 3000 N aventi stessa linea d'azione orizzontale.

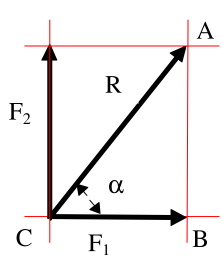


$$R = F_1 + F_2 = 5000\text{N}$$



$R = F_1 - F_2 = 1000\text{N}$ con verso opposto a quello di F_2

Determinare la risultante delle forze ortogonali incidenti rappresentate in figura:



si compongono con la regola del parallelogramma

F_1 = 1000 N

F_2 = 1300 N

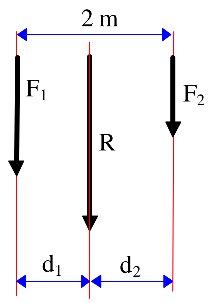
Dal triangolo rettangolo ABC si calcola

$$R = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1000^2 + 1300^2} = 16400\text{N}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1300}{1000} = 1{,}3$$

$$\alpha = \text{arctg}(1{,}3) = 52{,}43°$$

Determinare la risultante delle forze parallele e concordi rappresentate in figura:



$$\begin{matrix} F_1 = 2000N \\ F_2 = 1600N \end{matrix} \Rightarrow R = F_1 + F_2 = 2000 + 1600 = 3600N$$

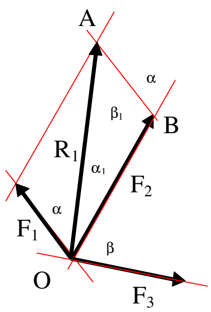
$F_1 : F_2 = d_2 : d_1$

$(F_1 + F_2) : F_2 = (d_2 + d_1) : d_1$

ma $F_1 + F_2 = R$ e $d_2 + d_1 = 2$ m $\Rightarrow$

$$R : F_2 = 2 : d_1 \Rightarrow \begin{matrix} d_1 = \frac{2F_2}{R} = \frac{2x1600}{3600} = 0{,}888m \\ d_2 = 2 - d_1 = 2 - 0{,}888 = 1{,}112m \end{matrix}$$

Calcolare la risultante del sistema di forze incidenti rappresentate in figura:



$F_1 = 2000$ N, $F_2 = 3000$ N, $F_3 = 2500$ N, $\alpha = 68°$, $\beta = 75°$

Si calcola la risultante di F_1 ed F_2 : (triangolo OAB)

$$R_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} = \sqrt{2000^2 + 3000^2 + 2\times2000\times3000\cos68°} = 4182{,}73N$$

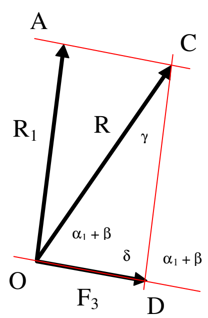
$$\beta_1 = 180° - \alpha = 180° - 68° = 112°$$

$$\frac{R_1}{sin\beta_1} = \frac{F_1}{sin\alpha_1} \Rightarrow sin\alpha_1 = \frac{F_1 \cdot sin\beta_1}{R_1} = \frac{2000\times sin112°}{4182{,}73} = 0{,}4433$$

$$\alpha_1 = \arcsin(\sin\alpha_1) = \arcsin(0{,}4433) = 26{,}31°$$

Si calcola la risultante di R_1 ed F_3 : (triangolo OCD)

l'angolo fra R_1 ed F_3 vale $(\alpha_1 + \beta) = 26{,}31° + 75° = 101{,}31°$



$$R = \sqrt{R_1^2 + F_3^2 + 2R_1F_3\cos(\alpha_1 + \beta)} = \sqrt{4182{,}73^2 + 2500^2 + 2\times4182{,}73\times2500\cos101{,}31°} = 4431{,}83N$$

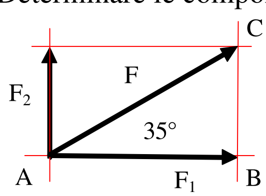
$$\delta = 180° - (\alpha_1 + \beta) = 180° - 101{,}31° = 78{,}69°$$

$$\frac{F_3}{sin\gamma} = \frac{R}{sin\delta} \Rightarrow sin\gamma = \frac{F_3 \cdot sin\delta}{R} = \frac{2500\times sin78{,}69°}{4431{,}83} = 0{,}5531$$

$$\gamma = \arcsin(\sin\gamma) = \arcsin(0{,}5531) = 33{,}58°$$

ESERCIZI SULLA SCOMPOSIZIONE DELLE FORZE

Determinare le componenti della forza F = 5000 N in figura, secondo le direzioni assegnate:

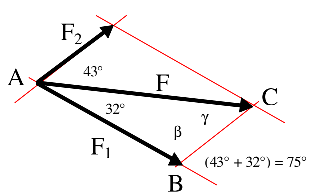


Dal triangolo rettangolo ABC si calcola:

$F_1 = F \cos 35° = 5000 \text{ x } 0{,}819 = 4095{,}7$ N

$F_2 = F \sin 35° = 5000 \text{ x } 0{,}573 = 2867{,}8$ N

Determinare le componenti della forza F = 5000 N in figura, secondo le direzioni assegnate:



si calcolano:

$\gamma = 43°$ perché angoli alterni interni

$\beta = 180° - (32° + 43°) = 105°$

Dal teorema dei seni applicato al triangolo ABC

$$\frac{F}{sin\beta} = \frac{F_1}{sin\gamma} \Rightarrow F_1 = \frac{F \cdot sin\gamma}{sin\beta} = \frac{5000\times sin43°}{sin105°} = 3530{,}28N$$

$$\frac{F}{sin\beta} = \frac{F_2}{sin32°} \Rightarrow F_2 = \frac{F \cdot sin32°}{sin\beta} = \frac{5000\times sin32°}{sin105°} = 2743{,}06N$$