

TERMODINAMICA

È la branca della fisica che descrive le trasformazioni subite da un SISTEMA MACROSCOPICO a seguito di uno scambio di energia con altri sistemi o con l'ambiente. *IL sistema macroscopico (o SISTEMA TERMODINAMICO) è definito come una porzione di materia geometricamente individuata, che esiste in un ambiente infinito e imperturbabile.*

*Il termine macroscopico è utilizzato per indicare che del sistema ci interessano solo gli effetti esterni misurabile generati da una qualsiasi trasformazione, come **pressione, temperatura, volume, massa volumica, calore specifico, dilatazione termica**, ecc. Non è d'interesse ciò che avviene all'interno del sistema (SCATOLA CHIUSA).*

La conoscenza della termodinamica è la base per lo studio delle macchine termiche. Per i nostri scopi ci riferiremo, in particolare, alla trasformazione del calore in lavoro e il nostro sistema termodinamico è costituito da un gas contenuto in un ambiente le cui pareti possono essere fisse e/o mobili (caso del *cilindro con stantuffo: ambiente con pareti fisse e una mobile*).

Visto che dobbiamo occuparci di gas, vediamo quali sono le CARATTERISTICHE DELLO STATO GASSOSO e le LEGGI che ne regolano le trasformazioni.

Lo stato gassoso è uno stato della materia caratterizzato da **deboli legami molecolari**. Conseguenza di ciò è l'estrema possibilità di movimento (**mobilità**) delle molecole che compongono il gas e quindi la tendenza ad **occupare tutto il volume a disposizione**. Infatti si dice che i gas non hanno né forma né volume proprio.

Il gas di cui ci occuperemo è un gas particolare, che non esiste in natura, a cui viene dato il nome di GAS IDEALE o PERFETTO. *Per esso valgono dei comportamenti e delle leggi molto più semplici rispetto ai gas reali.* Per questo motivo, nella tecnica, si fa riferimento al gas ideale ed eventualmente, quando è necessario si correggono opportunamente le relazioni valide per il gas ideale.

Un gas si dice IDEALE quando:

- è costituito da **molecole puntiformi**, cioè di dimensioni trascurabili;
- si ritengono **nulli i legami molecolari**;
- tutte le molecole hanno la **stessa velocità** e quindi la **stessa energia cinetica**; quando si urtano le une con le altre non varia la loro energia cinetica;
- la pressione è uguale (**pressione uniforme**) in tutti i punti della massa del gas.

Per tutti i gas, quanto più bassa è la loro pressione, tanto più tendono verso un comportamento uguale per tutti, che è quello del gas ideale.

La condizione o STATO DI UN GAS è definito quando sono noti i valori delle grandezze **PRESSIONE, VOLUME, TEMPERATURA**. I valori di tali grandezze si chiamano VARIABILI TERMODINAMICHE o DI STATO.

*Se tali valori **non mutano nel tempo** si dice che il gas è in uno STATO DI EQUILIBRIO.*

Per ogni stato di equilibrio, i valori delle tre grandezze sono legate da una relazione chiamata EQUAZIONE DI STATO.

Per una massa **m** di gas ideale si ha la seguente equazione di stato:

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \text{ pressione assoluta del gas} \\ V \left(\text{m}^3 \right) \text{ volume occupato dal gas} \\ m \text{ (kg) massa del gas} \\ R \left(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right) \text{ costante elastica del gas} \\ T \text{ (K) temperatura assoluta del gas} \end{array} \right.$$

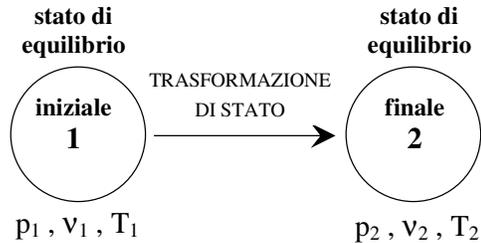
Dividendo per la massa del gas m si ottiene l'equazione di stato per massa unitaria ($m = 1 \text{ kg}$)

$$p \cdot \frac{V}{m} = \frac{m}{m} \cdot R \cdot T \xrightarrow{\text{da cui}} p \cdot v = R \cdot T \quad \text{con} \quad \begin{cases} \frac{V}{m} = v \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right) \text{ volume massico} \\ \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} = v \quad \text{con } \rho \neq \text{costante} \end{cases}$$

essendo il volume massico l'inverso della massa volumica, l'equazione di stato assume anche la forma:

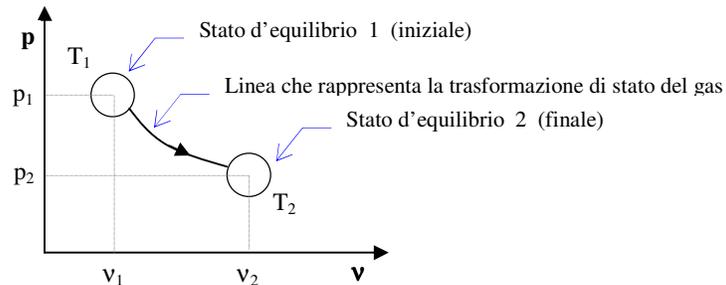
$$p \cdot \frac{1}{\rho} = R \cdot T \quad \text{per una MASSA UNITARIA DI GAS}$$

Variando una o più variabili di stato il gas subisce una TRASFORMAZIONE portandosi da uno stato di equilibrio 1 ad un altro stato di equilibrio 2, dove le variabili di stato assumono valori diversi, ma che devono soddisfare l'equazione di stato.



Se la trasformazione avviene in modo molto lento (TRASFORMAZIONE QUASI STATICA), tale da

potere assumere come stati d'equilibrio tutti gli stati intermedi attraversati dal gas per portarsi da uno stato fisico iniziale d'equilibrio ad uno finale d'equilibrio, allora la trasformazione è rappresentabile nel piano ($v - p$) (PIANO DI CLAPEYRON).



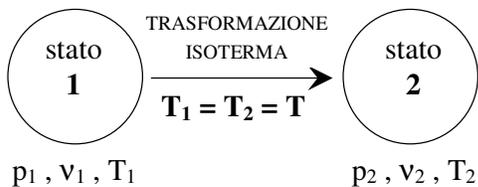
Nel nostro studio supporremo le trasformazioni quasi statiche e quindi sempre rappresentabili nel piano di Clapeyron ($v - p$). I principi della termodinamica, scoperti nel XIX secolo, regolano tutte le trasformazioni termodinamiche e ne fissano i limiti.

↳ TRASFORMAZIONI DI STATO DEL GAS IDEALE

È interessante studiare delle trasformazioni di stato particolari, dove si mantiene costante, durante la trasformazione, una delle tre variabili di stato.

➤ *Trasformazione isoterma* ($T = \text{costante}$)

Si ha quando durante la trasformazione del gas tra due **stati di equilibrio**, si mantiene **costante la temperatura**.



Per lo stato d'equilibrio 1 si scrive:

$$p_1 \cdot v_1 = R \cdot T$$

Per lo stato d'equilibrio 2 si scrive:

$$p_2 \cdot v_2 = R \cdot T$$

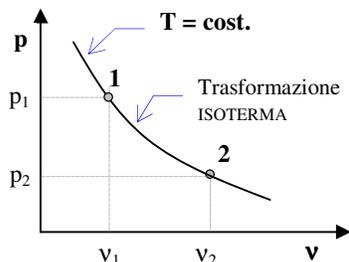
Facendo il rapporto si ottiene

$$\frac{p_1 \cdot v_1}{p_2 \cdot v_2} = \frac{R \cdot T}{R \cdot T} = 1 \Rightarrow p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$$

essendo gli stati d'equilibrio considerati generici, la relazione si può generalizzare nella seguente:

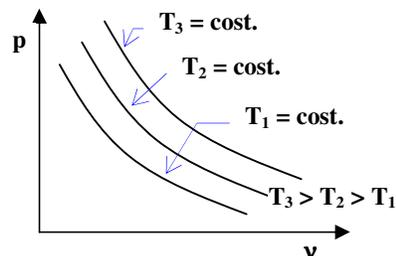
$$p \cdot v = \text{costante} \quad \text{LEGGE DI BOYLE}$$

Tale relazione, nel piano (v - p) è rappresentata da una iperbole equilatera.



All'aumentare del volume diminuisce la pressione e viceversa al diminuire del volume aumenta la pressione, in modo che:

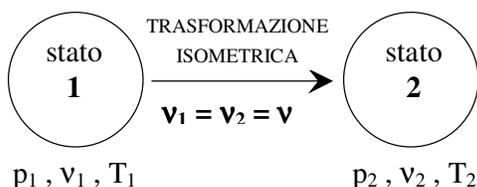
$$p \cdot v = \text{cost.}$$



Al variare della temperatura $T_1 = \text{cost.}$, $T_2 = \text{cost.}$, a cui si fa avvenire la trasformazione, si ottengono tante iperboli traslate fra di loro

➤ *Trasformazione isocora o isometrica* ($V = \text{costante}$)

Si ha quando durante la trasformazione del gas tra due **stati di equilibrio**, si mantiene **costante il volume**.



Per lo stato d'equilibrio **1** si scrive:

$$p_1 \cdot v = R \cdot T_1$$

Per lo stato d'equilibrio **2** si scrive:

$$p_2 \cdot v = R \cdot T_2$$

Facendo il rapporto si ottiene

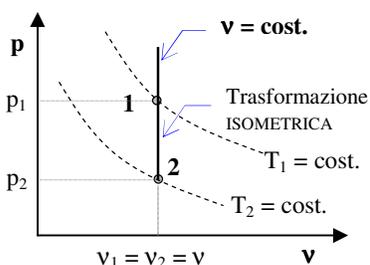
$$\frac{p_1 \cdot v}{p_2 \cdot v} = \frac{R \cdot T_1}{R \cdot T_2} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

essendo gli stati d'equilibrio considerati generici, la relazione si può generalizzare nella seguente:

$$\frac{p}{T} = \text{cost.}$$

LEGGE DI **GAY-LUSSAC**

Tale relazione, nel piano (v - p) è rappresentata da una retta parallela all'asse delle pressioni.

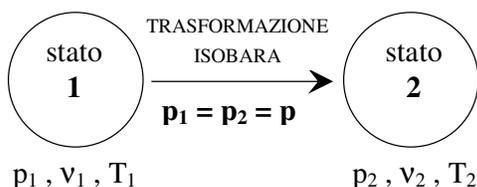


All'aumentare della pressione aumenta la temperatura e viceversa. Così, ad esempio: il gas nello stato **1** ha pressione p_1 e temperatura T_1 , nello stato **2** ha pressione $p_2 < p_1$ e temperatura $T_2 < T_1$, in modo che venga soddisfatta la

relazione: $\frac{p}{T} = \text{cost.}$

➤ *Trasformazione isobara* ($p = \text{costante}$)

Si ha quando durante la trasformazione del gas tra due **stati di equilibrio**, si mantiene **costante la pressione**.



Per lo stato d'equilibrio **1** si scrive:

$$p \cdot v_1 = R \cdot T_1$$

Per lo stato d'equilibrio **2** si scrive:

$$p \cdot v_2 = R \cdot T_2$$

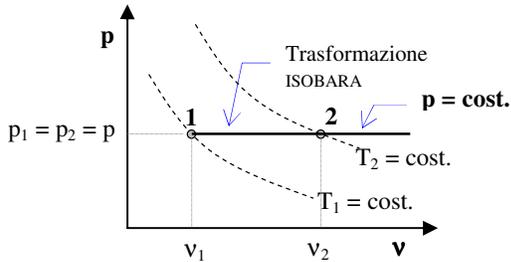
Facendo il rapporto si ottiene

$$\frac{p \cdot v_1}{p \cdot v_2} = \frac{R \cdot T_1}{R \cdot T_2} \Rightarrow \frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2}$$

essendo gli stati d'equilibrio considerati generici, la relazione si può generalizzare nella seguente:

$$\frac{V}{T} = \text{cost.} \quad \text{LEGGES DI GAY-LUSSAC}$$

Tale relazione, nel piano (v - p) è rappresentata da una retta parallela all'asse dei volumi.



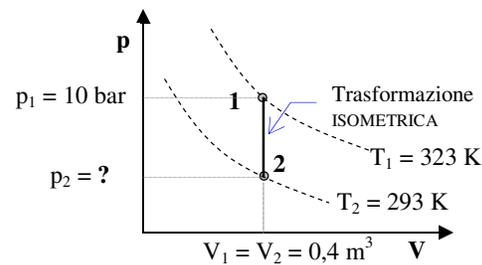
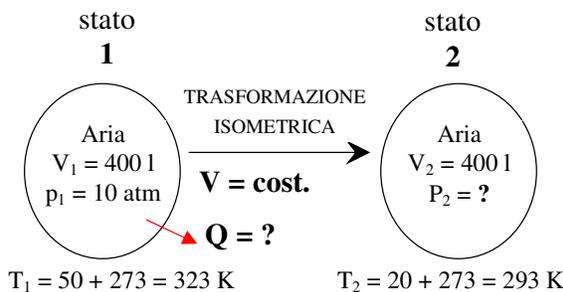
All'aumentare del volume aumenta la temperatura e viceversa, in modo che:

$$\frac{V}{T} = \text{cost.}$$

Esercizio

Un serbatoio contiene 400 l di aria ($R = 287,1 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$) compressa alla pressione assoluta $p_1 = 10 \text{ atm}$ e a temperatura $t_1 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$. La temperatura dell'aria diminuisce fino a $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Calcolare la pressione finale del gas e la quantità di calore disperso Q .

Supponendo chiuso il serbatoio, il volume dell'aria rimane costante, quindi la trasformazione è isometrica. Per tale trasformazione si può scrivere:



$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \xrightarrow{\text{da cui si calcola}} p_2 = T_2 \cdot \frac{p_1}{T_1} = 293 \times \frac{1013250}{323} = 919140 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cong 9,19 \text{ bar}$$

La **trasformazione di stato è stata causata dalla dispersione di calore** attraverso le pareti del serbatoio; tale **CALORE** si calcola dalla relazione:

$Q = c_v \cdot m \cdot (T_1 - T_2)$ dove viene utilizzato il calore specifico a volume costante c_v , poiché la trasformazione è isometrica; per l'aria: $c_v = 717 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

La **MASSA DELL'ARIA** si calcola con la relazione:

$m = \rho \cdot V$ dove la massa volumica ρ dipende dalle condizioni in cui si trova l'aria. Ricordando che $\rho = \frac{1}{v}$, dall'equazione di stato applicata allo stato d'equilibrio **1** si calcola

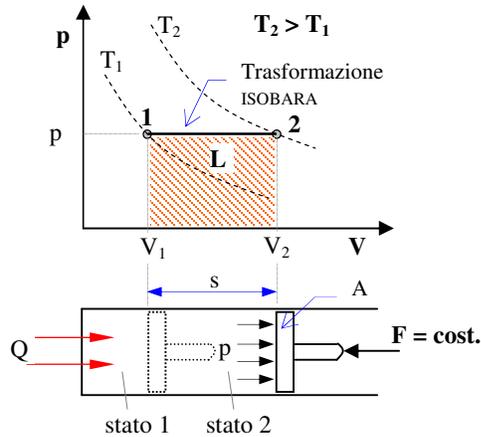
$$p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1 \Rightarrow \frac{1}{v_1} = \rho = \frac{p_1}{R \cdot T_1} = \frac{1013250}{287,1 \times 323} \cong 10,93 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Quindi: $m = \rho \cdot V = 10,93 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,4 \text{ m}^3 = 4,372 \text{ kg}$

Pertanto: $Q = c_v \cdot m \cdot (T_1 - T_2) = 717 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 4,372 \text{ kg} \times (323 \text{ K} - 293 \text{ K}) \cong 94042 \text{ J}$

↳ LAVORO DI ESPANSIONE FATTO DA UN GAS

Consideriamo una **massa unitaria** ($m = 1 \text{ kg} \Rightarrow v \equiv V$) di gas racchiuso all'interno di un cilindro fornito di uno stantuffo mobile. Si considerino nulli gli attriti e la pressione esterna sullo stantuffo costante. Il gas rappresenta un sistema termodinamico con pareti mobili.



Al gas che si trova nello stato d'equilibrio **1**, forniamo una certa quantità di calore **Q** in modo da fare avvenire una trasformazione di stato a pressione costante ($p = \text{cost.}$), che porta il gas allo stato d'equilibrio **2**.

Si nota che per effetto del calore fornito al sistema:

aumenta il volume da V_1 a V_2

aumenta la temperatura da T_1 a T_2

lo stantuffo compie lo spostamento s

Poiché durante la trasformazione lo stantuffo viene movimentato, il gas compie un lavoro. Calcoliamolo:

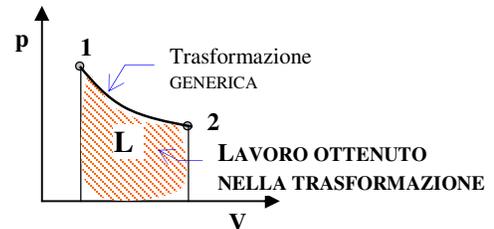
$$L = F \cdot s \quad \text{dove} \quad \begin{cases} F = p \cdot A \quad (N) \\ s = \frac{V_2 - V_1}{A} \quad \text{con } A \text{ (m}^2\text{) area stantuffo, } s \text{ (m) corsa stantuffo} \end{cases}$$

Quindi il **lavoro fatto dal gas in una espansione a $p = \text{cost.}$** vale:

$$L = F \cdot s = p \cdot A \cdot \frac{V_2 - V_1}{A} = p \cdot (V_2 - V_1) \quad (J)$$

Quindi possiamo concludere che fornendo una quantità di calore **Q** si ottiene, nelle condizioni su esposte, un lavoro **L**. Oltre al lavoro **si è ottenuto un altro effetto**: è aumentata la temperatura del gas da T_1 a T_2 ; questo vuol dire che non tutto il calore fornito al sistema si è trasformato in lavoro, infatti una parte del calore (**energia termica**) è stata utilizzata per incrementare la temperatura del gas o, come si dice in termodinamica, è **aumentata la totalità di energia contenuta nel gas**, cioè la sua **ENERGIA INTERNA**.

Inoltre si può notare che il valore del lavoro **L** coincide con l'area sottesa tra la linea della trasformazione e l'asse dei volumi. Questo fatto è generale per cui il lavoro fatto dal gas in una qualsiasi trasformazione coincide con l'area sottesa dalla linea che rappresenta la trasformazione.



Esercizio

Una massa di aria $m = 0,4 \text{ kg}$ viene riscaldata alla pressione assoluta costante $p_1 = 6 \text{ bar}$ fino a raddoppiarne il volume ($V_2 = 2 V_1$). La temperatura iniziale vale $T_1 = 303 \text{ K}$. Calcolare:

- la temperatura finale dell'aria T_2 ;
- il lavoro d'espansione fatto dal gas L ;
- la quantità di calore somministrata al gas Q .

Per una trasformazione isobara: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{m \cdot V_1}{T_1} = \frac{m \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

Pertanto: $T_2 = \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1 = \frac{2V_1}{V_1} \cdot T_1 = 2T_1 = 2 \times 303 = 606 \text{ K}$

Per una trasformazione isobara: $L = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot (2V_1 - V_1) = p \cdot V_1$

Il volume V_1 non è noto, però è calcolabile applicando l'equazione di stato del gas per lo stato d'equilibrio 1 :

$$p \cdot V_1 = m \cdot R \cdot T_1 \xrightarrow{\text{da cui si calcola}} V_1 = \frac{m \cdot R \cdot T_1}{p}$$

Quindi il **LAVORO FATTO DAL GAS** vale:

$$L = p \cdot V_1 = p \cdot \frac{m \cdot R \cdot T_1}{p} = m \cdot R \cdot T_1 = 0,4 \text{ kg} \times 287,1 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 303 \text{ K} \cong 34795 \text{ J}$$

Il **calore somministrato al gas** vale:

$$Q = c_p \cdot m \cdot (T_2 - T_1) = 1045 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 0,4 \text{ kg} \times (606 \text{ K} - 303 \text{ K}) = 126654 \text{ J}$$

Nota importante: da notare che $Q > L$; la differenza tra il calore somministrato al gas e il lavoro ottenuto è la **VARIAZIONE DI ENERGIA INTERNA ΔU** del gas:

$$Q - L = \Delta U \quad \text{1° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA}$$

L'energia termica che non si è trasformata in lavoro è rimasta immagazzinata nel gas facendone aumentare l'ENERGIA INTERNA. L'EFFETTO MACROSCOPICO dell'aumento dell'energia interna del gas è dato dall'AUMENTO DI TEMPERATURA.

↳ TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE - GRANDEZZE DI SCAMBIO

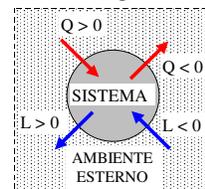
Per processo o trasformazione si intende l'evoluzione di un sistema da uno stato iniziale di equilibrio, caratterizzato dai valori definiti dei parametri (pressione, volume, temperatura) ad uno stato finale di equilibrio caratterizzato da altri valori definiti dei medesime parametri. Il processo si dice:

- *aperto* se lo stato finale è diverso dallo stato iniziale;
- *chiuso o ciclico* se lo stato finale coincide con lo stato iniziale;
- *senza deflusso* quando l'unità di massa di sostanza che si considera è racchiusa entro confini (eventualmente mobili) senza aperture;
- *con deflusso* quando l'unità di massa fluisce attraverso una porzione di spazio ben delimitata da confini, attraversando una sezione d'entrata e una d'uscita.

Durante il processo, e affinché questo avvenga, vi deve essere scambio di calore e/o di lavoro attraverso i confini che limitano la porzione di spazio, ove il processo avviene, e l'ambiente esterno. Il calore è energia che viene trasferita. Esso fluisce da un punto ad un altro. Quando il flusso è cessato, non c'è più ragione di usare la parola calore. Parlare di "calore in un corpo" sarebbe altrettanto scorretto quanto parlare di "lavoro in un corpo". *L'esecuzione di lavoro e il flusso di calore sono due modi attraverso i quali si può variare l'energia interna di un corpo. Preme avvertire che calore e lavoro* (che sono quantità di energia) **hanno significato soltanto durante il processo: sono grandezze di scambio e non grandezze di stato** come la pressione, il volume. Ha significato parlare di pressione p_1 in un determinato stato e di differenza di pressione $p_2 - p_1$ fra gli stati finale e iniziale del processo. Ma non ha senso parlare di calore Q_1 o lavoro L_1 in un determinato stato. Bisognerà dire: "calore Q_{12} e lavoro L_{12} scambiati fra il sistema e l'esterno durante il processo che porta dallo stato 1 allo stato 2". E queste quantità Q_{12} e L_{12} non dipendono solo dagli stati 1 e 2 ma dipendono anche dal particolare percorso seguito, fra gli infiniti possibili, per passare dallo stato iniziale allo stato finale.

Circa i segni da attribuire a queste due grandezze di scambio si adotta la seguente convenzione:

- *positivo il calore* fornito al sistema dall'esterno;
- *negativo il calore* ceduto dal sistema all'esterno;
- *positivo il lavoro* ceduto dal sistema all'esterno;
- *negativo il lavoro* fornito al sistema dall'esterno.



↳ ENERGIA INTERNA

È la somma delle energie che possiedono le singole particelle che compongono il sistema. *Ovviamente questa energia interna dipende dallo stato termodinamico del sistema ed è legata all'agitazione delle molecole costituenti il sistema. Essa è di tipo meccanico, in quanto legata al moto microscopico e disordinato delle molecole.*

Per ogni stato d'equilibrio in cui si trova il sistema, l'energia interna assume un ben determinato valore. **Nessuna importanza ha il modo come il sistema ha raggiunto quello stato di equilibrio:** per tale motivo si dice che **L'ENERGIA INTERNA È UNA FUNZIONE DI STATO.**

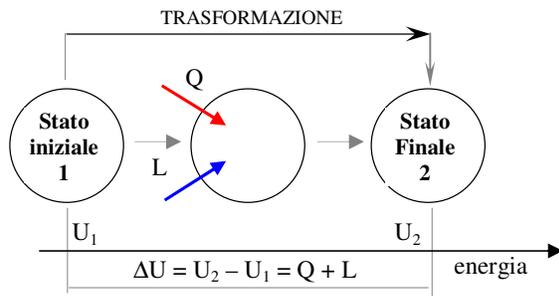
Joule dimostrò che nel caso di gas ideale la variazione di energia interna del sistema, durante una trasformazione, dipende solo dalla variazione della temperatura del sistema.

PER UN GAS IDEALE, L'ENERGIA INTERNA È FUNZIONE DELLA SOLA TEMPERATURA, cioè

$$U = U(T)$$

↳ IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

I risultati visti in precedenza ci consentono di enunciare il primo principio della termodinamica:



nel corso di una trasformazione termodinamica, la somma del lavoro esterno fornito al sistema e del calore esterno ceduto al sistema dipende soltanto dagli stati iniziali e finali del sistema.

Per definizione questa somma è uguale alla variazione dell'energia interna del sistema, ossia

$$\Delta U = Q + L$$

Dove le quantità Q ed L sono considerate in valore assoluto, indipendentemente da qualsiasi convenzione sui segni (**bilancio energetico**)

Tale principio afferma che:

- esiste sempre una funzione di stato, U detta energia interna del sistema;*
- il sistema termodinamico, quando la sua temperatura è diversa dal suo intorno, scambia con l'esterno una nuova forma di energia, il calore, indicato con Q . Tale quantità, aggiunta al lavoro, eguaglia la variazione di energia interna.*

In forma quantitativa, **tenendo conto delle convenzioni sui segni** del calore e del lavoro scambiato:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - L$$

Da ricordare che:

- Q e L sono grandezze di scambio, **vanno prese con il loro segno** secondo la convenzione adottata e **dipendono dal tipo di trasformazione**, cioè dal percorso che ha portato il sistema dallo stato iniziale A a quello finale B ;
- U è una funzione di stato, quindi la sua variazione ΔU **non dipende dal tipo di trasformazione** che ha subito il sistema, ma solo dagli stati iniziale e finale ed inoltre è **funzione della sola temperatura** $U = U(T)$; per la massa unitaria di un gas ideale si calcola:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = c_V (T_2 - T_1).$$

↳ TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE – SISTEMI CHIUSI O SENZA DEFLUSSO –

Si fa riferimento alla massa unitaria ($m = 1 \text{ kg}$) di un gas ideale e le trasformazioni sono quasi – statiche; si suppone che il sistema termodinamico subisca una trasformazione che lo porta dallo stato d'equilibrio iniziale (**stato 1**) allo stato d'equilibrio finale (**stato 2**).

Si ricorda che

➤ la VARIAZIONE DI TEMPERATURA nella scala Kelvin coincide con la variazione di temperatura nella scala Celsius $(T_2 - T_1) = (t_1 - t_2)$

➤ Il RAPPORTO tra i volumi massici coincide con il rapporto tra i volumi $\frac{v_1}{v_2} = \frac{V_1}{V_2}$

Trasformazione ISOCORA $v = V = \text{costante}$

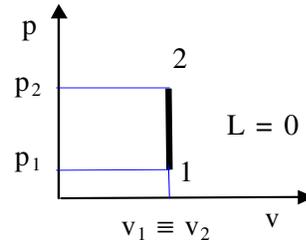
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{legge di GAY - LUSSAC}$$

$$L = 0 \quad \text{poichè } (v_2 - v_1) = 0$$

$$Q = c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right); \quad Q = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad (\text{J})$$

$$Q = \Delta U + L \Rightarrow Q = \Delta U$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$



- Il calore somministrato al sistema provoca un aumento della pressione e della temperatura (quindi dell'energia interna).
- Il calore sottratto al sistema provoca un diminuzione della pressione e della temperatura (quindi dell'energia interna).
- La linea di trasformazione nel piano p-v è parallela all'asse delle ordinate.

Trasformazione ISOBARA $p = \text{costante}$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{legge di GAY - LUSSAC}$$

$$L = p \cdot (v_2 - v_1) \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right); \quad L = m \cdot p \cdot (v_2 - v_1) \quad (\text{J})$$

$$L = p \cdot (V_2 - V_1) \quad (\text{J})$$

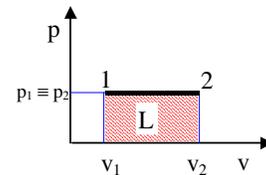
$$Q = c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right); \quad Q = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (\text{J})$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

$$Q = \Delta U + L$$

$$c_p \cdot (T_2 - T_1) = c_v \cdot (T_2 - T_1) + p \cdot (v_2 - v_1)$$

$$c_p \cdot (T_2 - T_1) = c_v \cdot (T_2 - T_1) + R \cdot (T_2 - T_1) \Rightarrow c_p - c_v = R$$



- Il calore somministrato al sistema provoca un aumento del volume e della temperatura (quindi dell'energia interna).
- Il calore sottratto al sistema provoca un diminuzione del volume e della temperatura (quindi dell'energia interna).
- La linea di trasformazione nel piano p-v è parallela all'asse delle ascisse.

Trasformazione ISOTERMA $T = \text{costante}$

$p \cdot v = \text{cost.}$ cioè $p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$ legge di BOYLE

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv = R \cdot T \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = R \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

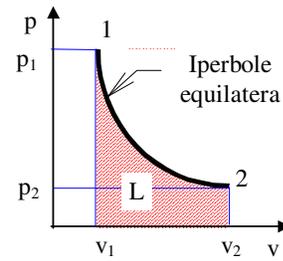
$$L = p_1 v_1 \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

$$L = p_2 v_2 \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

$\Delta U = U_2 - U_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1) = 0$ poichè $T = \text{cost.}$

$$Q = \Delta U + L \Rightarrow Q = L \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

- Se la pressione aumenta, il volume diminuisce (COMPRESSIONE)
- Se la pressione diminuisce, il volume aumenta (ESPANSIONE)
- La linea di trasformazione nel piano $p - v$ è un'iperbole equilatera

**Trasformazione ADIABATICA $Q = 0$**

$p \cdot v^k = \text{cost.}$ cioè $p_1 \cdot v_1^k = p_2 \cdot v_2^k$ con $k = \frac{c_p}{c_v}$

$p \cdot v \cdot v^{k-1} = \text{cost.} \Rightarrow R \cdot T \cdot v^{k-1} = \text{cost.} \Rightarrow T \cdot v^{k-1} = \text{cost.}$

$p \cdot \left(\frac{R \cdot T}{p} \right)^k = \text{cost.} \Rightarrow T^k \frac{p}{p^k} R^k = \text{cost.} \Rightarrow T^k \cdot p^{1-k} = \text{cost.}$

$$\sqrt[k]{T^k} \cdot \sqrt[k]{p^{1-k}} = \sqrt[k]{\text{cost.}}$$

$$T \cdot p^{\frac{1-k}{k}} = \text{cost.}$$

$Q = \Delta U + L \Rightarrow L = -\Delta U$

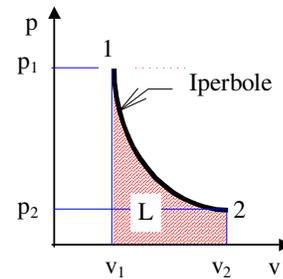
$$L = -c_v \cdot (T_2 - T_1) = c_v \cdot (T_1 - T_2) \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

$$L = \frac{1}{k-1} \cdot (p_1 \cdot v_1 - p_2 \cdot v_2) \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

$$L = \frac{R \cdot T_1}{k-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} \right] \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

$$L = \frac{p_v \cdot v_1}{k-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} \right] \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

$$L = \frac{p_v \cdot v_1}{k-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$



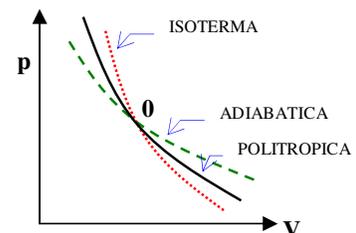
- Nell'espansione aumenta il volume mentre diminuiscono pressione e temperatura (quindi l'energia interna).
- Nella compressione diminuisce il volume mentre aumentano pressione e temperatura (quindi l'energia interna).
- La linea di trasformazione nel piano $p - v$ è un'iperbole.

Trasformazione POLITROPICA

È una qualsiasi trasformazione reale compresa nel campo individuato tra la trasformazione isoterma e quella adiabatica. L'equazione della trasformazione è:

$p \cdot v^n = \text{cost.}$ cioè $p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n$ con $1 < n < k$

Valgono tutte le relazioni scritte per la trasformazione adiabatica sostituendo all'esponente k l'esponente n .

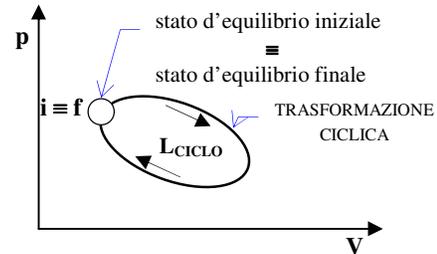


↳ CICLI TERMODINAMICI

I cicli sono una serie di trasformazioni che fanno tornare il sistema allo stato iniziale, in modo che tutte le variabili termodinamiche importanti assumano al termine del processo i valori di partenza. **L'energia interna di un sistema dipende solo da queste variabili (SOLO DALLA TEMPERATURA NEL CASO DI GAS IDEALE) e pertanto non varia in una trasformazione ciclica. Di conseguenza, PER IL 1° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA, il calore complessivo fornito al sistema deve uguagliare il lavoro complessivo compiuto da esso.**

$$\text{IN UN CICLO: } \Delta U = 0 = Q_{\text{CICLO}} - L_{\text{CICLO}} \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{CICLO}} = L_{\text{CICLO}}$$

L'area racchiusa dal ciclo rappresenta il lavoro complessivamente scambiato in tutte le trasformazioni che compongono il ciclo. Il lavoro è positivo se il ciclo viene percorso in senso orario, negativo quando viene percorso in senso antiorario.

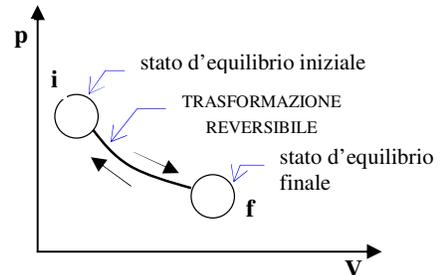


➤ CICLO DI CARNOT e RENDIMENTO TERMODINAMICO

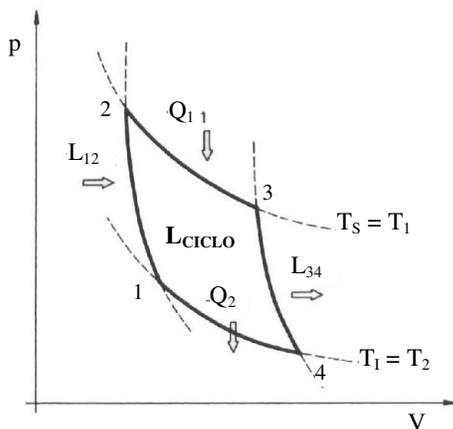
È un CICLO IDEALE costituito da DUE TRASFORMAZIONI ADIABATICHE REVERSIBILI e da DUE TRASFORMAZIONI ISOTERME REVERSIBILI.

Una trasformazione è reversibile quando avviene lentamente (trasformazione quasi statica) ed inoltre è nulla qualsiasi dissipazione di energia.

In queste condizioni la trasformazione può avvenire indifferentemente nei due sensi. Le **trasformazioni reversibili sono ideali, nella realtà, non potendo eliminare del tutto gli attriti, sono sempre irreversibili.**



Nel piano p, V è quello rappresentato in figura



- 1 – 2 COMPRESSIONE ADIABATICA ($Q = 0$)
 - 2 – 3 ESPANSIONE ISOTERMA ($T_S = T_1 = \text{cost.}$)
 - 3 – 4 ESPANSIONE ADIABATICA ($Q = 0$)
 - 4 – 1 COMPRESSIONE ISOTERMA ($T_1 = T_2 = \text{cost.}$)
- $T_S = T_1 \quad T_1 = T_2$

Consideriamo 1 kg di gas ideale (per la massa unitaria: $v \equiv V$ numericamente).

Poiché il gas ritorna, dopo un ciclo, nello stato fisico iniziale, sia le **variabili** p, V, T, sia la funzione di stato **energia interna** U riassumono lo stesso valore, quindi è nulla la loro variazione nel ciclo.

Applicando il 1° principio della termodinamica all'intero ciclo, si scrive:

$$Q_{\text{CICLO}} = L_{\text{CICLO}} \quad \text{poiché} \quad \Delta U_{\text{CICLO}} = 0$$

L_{CICLO} è il lavoro complessivamente scambiato (somma algebrica di $L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41}$) rappresentato dall'area racchiusa dalle trasformazioni (positivo, in questo caso, perché il ciclo è percorso in senso orario).

Q_{CICLO} è il calore complessivamente scambiato nel ciclo

$$Q_{\text{CICLO}} = Q_{23} + Q_{41} \quad \text{poiché nelle trasformazioni adiabatiche } Q = 0$$

Con i simboli in figura ($Q_1 = Q_{23}$ e $Q_2 = Q_{41}$):

$$Q_{\text{CICLO}} = Q_1 - Q_2 \quad \text{con i valori di } Q_1 \text{ e di } Q_2 \text{ presi in valore assoluto}$$

- Q_1 è la quantità di calore che una SORGENTE o SERBATOIO DI CALORE a temperatura T_S cede al sistema nell'espansione isoterma 2 – 3.
- Q_2 è la quantità di calore che una SORGENTE DI CALORE a temperatura $T_1 < T_S$ assorbe dal sistema durante la compressione isoterma 4 – 1.

Una SORGENTE DI CALORE è un sistema che può cedere o assorbire calore senza variazioni di temperatura.

Pertanto possiamo scrivere:

$$L_{\text{CICLO}} = Q_1 - Q_2$$

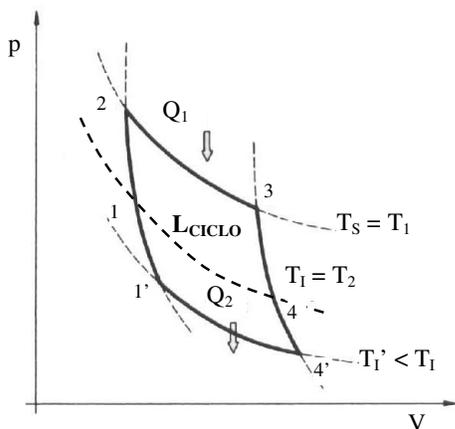
Da cui si nota che non tutto il calore Q_1 è stato trasformato in lavoro, poiché una parte Q_2 è stata ceduta dal sistema, ad una temperatura più bassa, per riportare il sistema nello stato iniziale.

Questo fatto riscontrato nel ciclo di Carnot è generale e quindi *in una qualsiasi trasformazione ciclica, una parte del calore immesso alla temperatura superiore verrà sempre ceduta a temperatura inferiore (2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA) e quindi non sarà convertita in lavoro.*

Da qui nasce il concetto di rendimento termodinamico

$$\eta = \frac{\text{lavoro ottenuto in 1 ciclo}}{\text{calore ricevuto in 1 ciclo}} = \frac{\text{ENERGIA OTTENUTA}}{\text{ENERGIA SPESA}} = \frac{L_{\text{CICLO}}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 \quad \text{SEMPRE} \quad \text{poichè } Q_1 > Q_2 \quad Q_2 \text{ rappresenta il calore assorbito dalla}$$



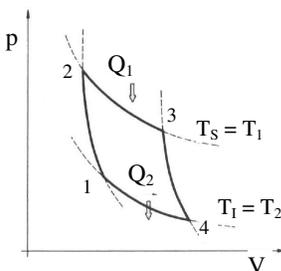
macchina che non viene convertito in lavoro durante il processo.

Dalla definizione di rendimento $\eta = \frac{L_{\text{CICLO}}}{Q_1}$ si capisce che

η AUMENTA se AUMENTA L_{CICLO}

Per esempio facendo cedere alla macchina il calore Q_2 a una temperatura più bassa, in figura a temperatura $T_1' < T_1$ (l'isoterma T_1' è più vicina agli assi), si nota che aumenta l'area del ciclo e quindi L_{CICLO} , in quanto i punti **1** e **4** si sono spostati nei punti **1'** e **4'**

Da qui si intuisce che le temperature delle due sorgenti, calda e fredda, influenzano il valore del rendimento. Per quantificarlo calcoliamo le quantità di calore scambiate durante il ciclo:



Applicando il 1° principio alle due trasformazioni isoterme, dove essendo: $T = \text{cost.} \Rightarrow \Delta U = c_V \cdot \Delta T = 0$, si può scrivere:

$$Q_{23} = Q_1 = L_{23} = R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_3}{V_2}$$

$$Q_{41} = Q_2 = L_{41} = -R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_1}{V_4}$$

negativo perché ceduto dal sistema

Per le proprietà dei logaritmi $-\ln \frac{V_1}{V_4} = \ln \frac{V_4}{V_1}$ pertanto $Q_2 = R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_1}$

Facendo il rapporto fra le due quantità di calore si ottiene:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_1}}{R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_3}{V_2}} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{essendo, per i CICLI SIMMETRICI} \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$$

NOTA: un ciclo è SIMMETRICO quando le trasformazioni che lo compongono sono a due a due uguali. Per questi cicli si dimostra la seguente regola: *il prodotto di una qualsiasi variabile di stato in punti non consecutivi del ciclo è costante*. Pertanto si può scrivere:

$$V_1 \cdot V_3 = V_2 \cdot V_4 \quad p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 \quad T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_4$$

Pertanto $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ o anche $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$

Quindi in definitiva per il RENDIMENTO DEL CICLO DI CARNOT si può scrivere:

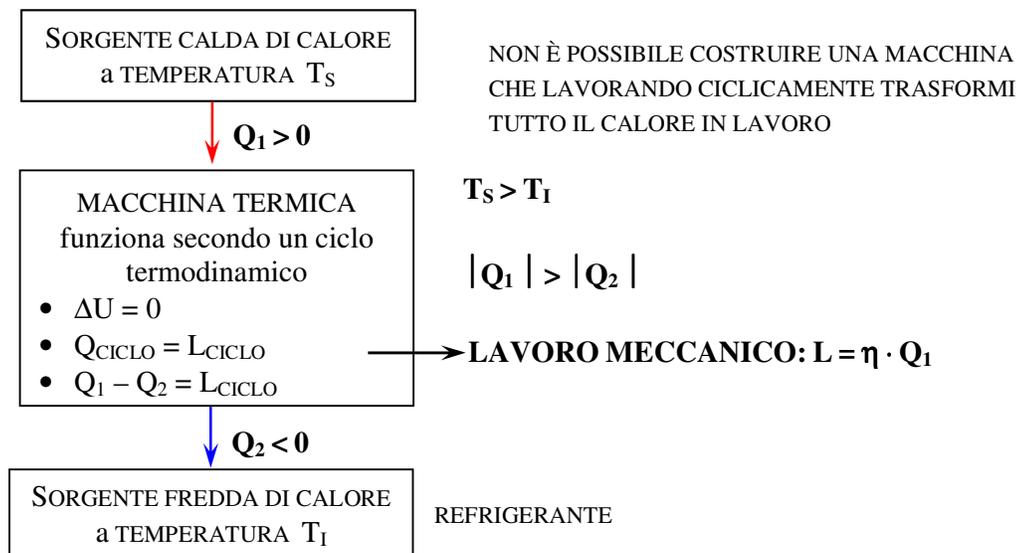
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{con } T_1 > T_2 \quad \text{che dipende solo dalle temperature delle sorgenti di calore e non dal tipo di gas che evolve nel ciclo.}$$

Inoltre questo rendimento è il massimo, poiché il calore scambiato nella trasformazione isoterma si trasforma tutto in lavoro, quindi QUELLO DI CARNOT È IL CICLO DI MASSIMO RENDIMENTO.

È un ciclo ideale, quindi irrealizzabile praticamente, ma serve di confronto con i rendimenti dei cicli termodinamici che utilizzano le macchine termiche.

Ogni MACCHINA TERMICA funziona in modo che i suoi organi riprendono la stessa posizione dopo un certo tempo, quindi FUNZIONANO CICLICAMENTE sfruttando, ognuna, un particolare ciclo termodinamico che permette di TRASFORMARE CALORE IN LAVORO (**macchine termiche motrici**).

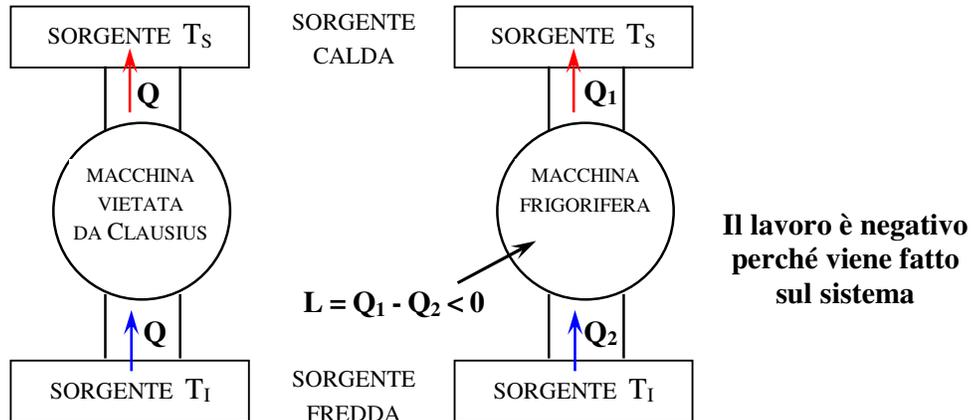
Una qualsiasi macchina termica motrice può essere schematizzata nel seguente modo, IN ACCORDO CON L'EVIDENZA SPERIMENTALE.



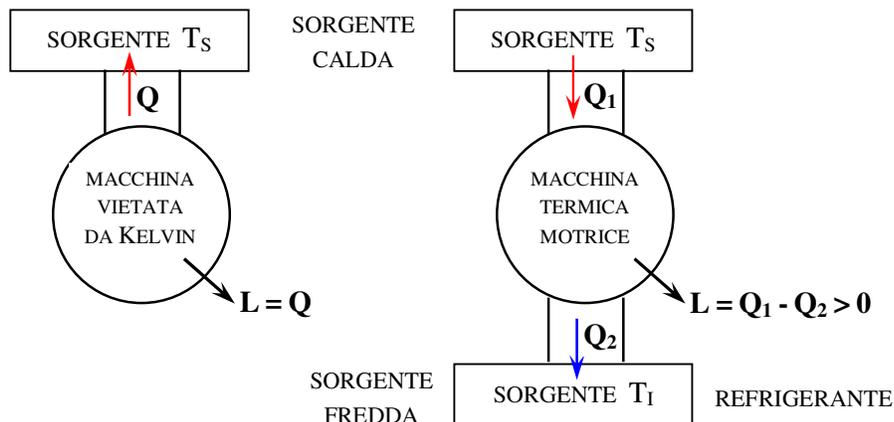
↳ 2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Le LIMITAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE DEL CALORE IN LAVORO sono contenute nel 2° PRINCIPIO, i cui seguenti enunciati sono fra loro equivalenti.

ENUNCIATO DI CLAUSIUS: è impossibile realizzare una trasformazione il cui UNICO RISULTATO sia quello di trasferire calore da un corpo più freddo a uno più caldo.



ENUNCIATO DI KELVIN: è impossibile realizzare una trasformazione il cui UNICO RISULTATO sia quello di assorbire una quantità di calore Q da un'UNICA SORGENTE di calore e trasformarla COMPLETAMENTE in lavoro.



Esempio: in una trasformazione isoterma si ha $Q = L$ (qualcuno potrebbe pensare: Kelvin ha torto!!), ma, attenzione, non è l'UNICO RISULTATO, infatti varia lo stato fisico del gas

(STATO FISICO INIZIALI \neq STATO FISICO FINALE)

Kelvin, in sostanza dice che una qualsiasi macchina termica per potere funzionare ha bisogno di DUE SORGENTI DI CALORE. Il calore Q_2 ceduto alla sorgente più fredda si troverà ad una temperatura più bassa e la macchina non ha più alcuna possibilità di trasformarlo in lavoro, cioè l'energia termica Q_2 è passata ad un livello inferiore, ovvero si è **DEGRADATA**.

Generalizzando, si può dire che in tutti i **processi naturali spontanei**, che sono **irreversibili**, si ha un continuo trasferimento di calore da corpi caldi a corpi più freddi e quindi un continuo decadimento dell'energia termica.

Nota: dire che l'energia termica si è **DEGRADATA NON VUOL DIRE CHE È SCOMPARSA** (questo lo nega il principio di conservazione dell'energia), ma che È **DIMINUITA LA POSSIBILITÀ DI TRASFORMARLA IN LAVORO**.

↳ ENTROPIA

Si consideri una qualsiasi trasformazione REVERSIBILE che da uno stato fisico d'equilibrio iniziale "i" a uno finale d'equilibrio "f".

Per eseguire la trasformazione bisogna fornire calore al sistema che via via aumenta la sua temperatura. Pensiamo di suddividere la linea che rappresenta la trasformazione in tante piccole parti ΔL ; se nel tratto ΔL viene fornito il calore ΔQ piccolo, il sistema subirà un piccolo incremento di temperatura: chiamiamo T_i la **temperatura media nel tratto ΔL** . Ragionando nello stesso modo per tutti i tratti ΔL , per ogni tratto si può calcolare il rapporto

$$\frac{\Delta Q}{T_i} \quad \text{con } T_i \quad \text{che assume valore diverso in ogni tratto}$$

Eseguendo la somma di tutti i rapporti $\sum_i \frac{\Delta Q}{T_i}$ si calcola una grandezza che è sempre la stessa qualunque sia il percorso seguito nella trasformazione per passare dallo stato iniziale a quello finale.

Ciò vuol dire che tale grandezza è INDIPENDENTE DAL PERCORSO e DIPENDE SOLO DALLO STATO FISICO DEL SISTEMA, quindi è una **FUNZIONE DI STATO**: a tale funzione si dà il nome di **ENTROPIA**.

$$\Delta S = \sum_i \frac{\Delta Q}{T_i} \left(\frac{J}{K} \right) \quad \text{VARIAZIONE DI ENTROPIA in una trasformazione reversibile}$$

Come per tutte le funzioni di stato interessa la VARIAZIONE DELLA GRANDEZZA relativa a una trasformazione di stato.

Così, per esempio, in una trasformazione

- ISOTERMA REVERSIBILE ($T_i = \text{cost.} = T$)

$$\Delta S = \frac{1}{T} \cdot \sum_i \Delta Q = \frac{Q}{T} \quad \text{essendo } Q = \sum_i \Delta Q \quad \text{il calore scambiato in tutta la trasformazione}$$

- ADIABATICA REVERSIBILE ($Q = 0$)

$$\Delta S = \sum_i \frac{\Delta Q}{T_i} = 0 \quad \text{essendo nullo ognuno dei } \Delta Q, \text{ quindi un'adiabatica reversibile è anche una}$$

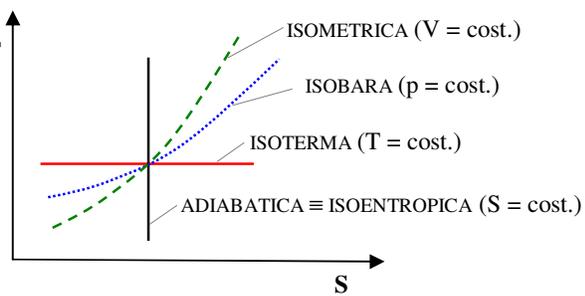
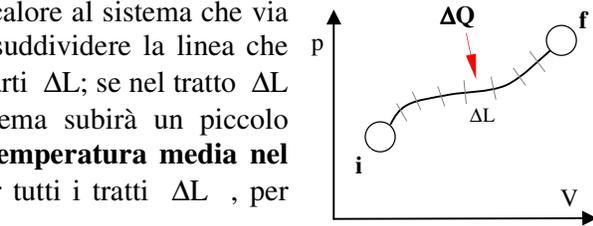
ISOENTROPICA (variazione nulla di entropia).

- CICLICA REVERSIBILE

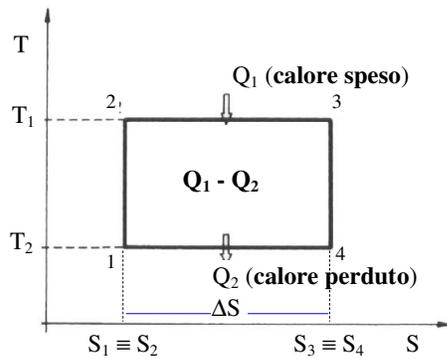
$$\Delta S = 0 \quad \text{poiché l'ENTROPIA È UNA FUNZIONE DI STATO e in un ciclo il sistema riassume lo stato iniziale}$$

Tutte le trasformazioni che conosciamo, se REVERSIBILI, sono rappresentabili nel piano temperatura – entropia (T-S).

La loro rappresentazione grafica è quella riportata in figura:



Rappresentiamo il CICLO DI CARNOT NEL PIANO T-S; per tale ciclo si ha **variazione di entropia** solo nelle **trasformazioni isoterme** (trasformazioni 2-3 e 4-1).



- 1 - 2 ADIABATICA \equiv ISOENTROPICA ($Q = 0 \Rightarrow \Delta S = 0$)
 3 - 4 ADIABATICA \equiv ISOENTROPICA ($Q = 0 \Rightarrow \Delta S = 0$)
 2 - 3, 4 - 1 ISOTERME ($T = \text{cost} , \Delta S \neq 0$)

$$\Delta S = S_{\text{finale}} - S_{\text{iniziale}} = \frac{Q}{T}$$

per l'isoterma 2-3: $\Delta S = S_3 - S_2 = \frac{Q_1}{T_1}$

per l'isoterma 4-1:

$$\Delta S = S_1 - S_4 = -\frac{Q_2}{T_2} \quad \text{il segno negativo vuol dire che il calore } Q_2 \text{ è ceduto dal sistema.}$$

Quindi la variazione di entropia nel ciclo vale:

$$\Delta S_{\text{CICLO}} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{ma abbiamo già visto che } \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \Rightarrow (\Delta S_{\text{CICLO}})_{\text{REVERSIBILE}} = 0$$

Se il ciclo è IRREVERSIBILE (**ciclo reale**) si ha sempre: $\Delta S > 0$

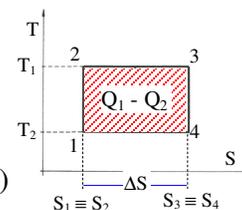
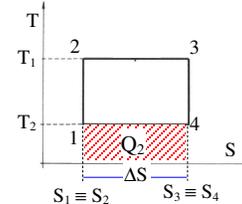
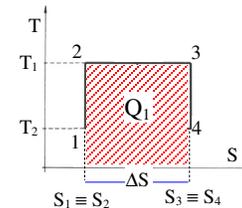
Nel piano T-S l'area racchiusa dal ciclo rappresenta il CALORE COMPLESSIVAMENTE SCAMBIATO; infatti

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \Rightarrow Q = T \cdot \Delta S \quad \text{quindi}$$

$$Q_1 = T_1 \cdot \Delta S = T_1 \cdot (S_3 - S_2) \quad \text{area sottesa dalla trasformazione 2-3} \\ \text{(CALORE SPESO in un ciclo)}$$

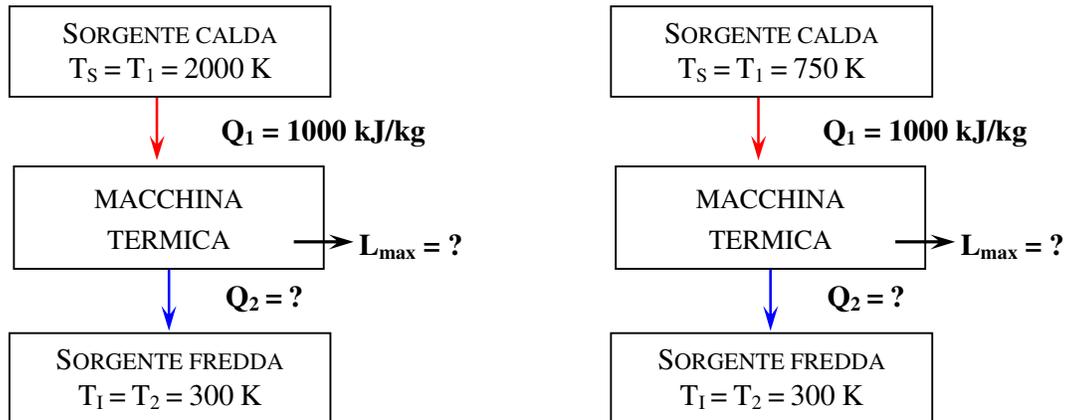
$$Q_2 = T_2 \cdot \Delta S = T_2 \cdot (S_1 - S_4) \quad \text{area sottesa dalla trasformazione 4-1} \\ \text{(CALORE PERDUTO in un ciclo)}$$

Quindi $Q_1 - Q_2$ è proprio l'area del rettangolo 1-2-3-4
 (CALORE UTILE in un ciclo, cioè quello trasformato in **lavoro meccanico**)



Esercizio: MACCHINA TERMICA ED ENERGIA DISPONIBILE

Supponiamo di voler CONVERTIRE CALORE IN LAVORO con una stessa macchina termica che opera con sorgenti di calore come in figura. Si deve calcolare quanto del calore speso Q_1 è trasformabile in lavoro nelle due condizioni di temperature delle sorgenti calde diverse. Inoltre il calore inutilizzabile Q_2 , cioè il calore non trasformato in lavoro.



La massima frazione di calore Q_1 che la macchina motrice termica può convertire in lavoro si calcola dalla definizione di rendimento. Ipotizziamo che la macchina utilizzi il ciclo di Carnot, in modo che sia massimo il suo rendimento: $\eta_{\text{CARNOT}} = \eta_{\text{max}} = \eta$ e quindi massimo il lavoro ottenibile.

$$\eta_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{2000 \text{ K}} = 0,85$$

Dalla definizione di rendimento

$$\eta = \frac{L_{\text{max}}}{Q_1} \Rightarrow L_{\text{max}} = \eta \cdot Q_1 = 0,85 \times 1000 = 850 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

ENERGIA DISPONIBILE \downarrow

$$L_{\text{max}} = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$$

$$Q_2 = Q_1 - L_{\text{max}} = 1000 - 850 = 150 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

CALORE INUTILIZZABILE \downarrow

$$\eta_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{750 \text{ K}} = 0,6$$

Dalla definizione di rendimento

$$\eta = \frac{L_{\text{max}}}{Q_1} \Rightarrow L_{\text{max}} = \eta \cdot Q_1 = 0,6 \times 1000 = 600 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

ENERGIA DISPONIBILE \downarrow

$$L_{\text{max}} = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$$

$$Q_2 = Q_1 - L_{\text{max}} = 1000 - 600 = 400 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

CALORE INUTILIZZABILE \downarrow

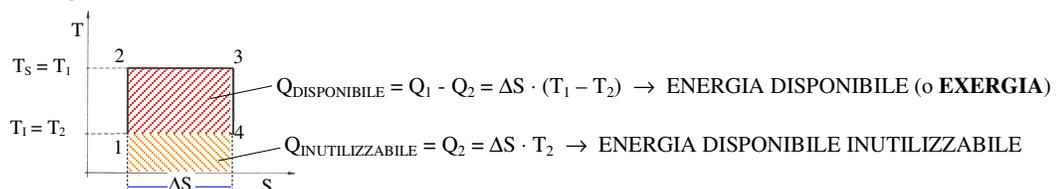
Quindi $L_{\text{max}} = Q_1 - Q_2 = Q_{\text{disponibile}}$ è la **quantità di calore trasformabile in lavoro**. Tale quantità **dipende dalle temperature delle sorgenti di calore**, infatti la stessa quantità $Q_1 = 1000 \text{ kJ/kg}$, fornita da una sorgente a 2000 K è più utile nella produzione di lavoro rispetto a quella fornita a 750 K:

nel primo caso $L_{\text{max}} = 850 \text{ kJ/kg}$

nel secondo caso $L_{\text{max}} = 600 \text{ kJ/kg}$

Possiamo dire che il **calore fornito a temperatura maggiore è di qualità superiore e man mano che il calore viene trasferito verso temperature più basse si degrada**.

Rappresentando il ciclo di Carnot della macchina nel diagramma T-S si ha la seguente interpretazione grafica:



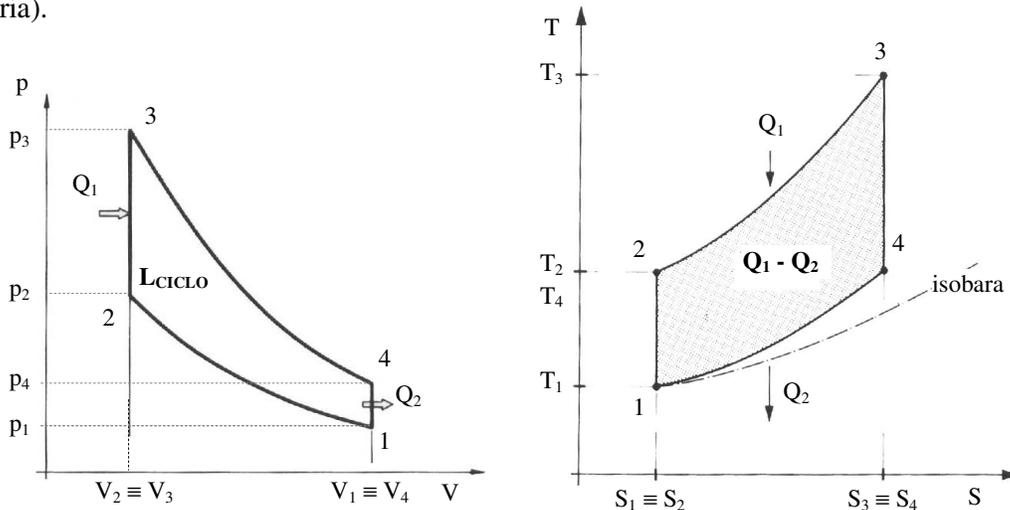
CICLI TERMODINAMICI IDEALI E RENDIMENTI

Sono cicli che costituiscono la base funzionale delle macchine termiche. Sono IDEALI in quanto le trasformazioni sono considerate REVERSIBILI e il fluido che subisce le trasformazioni è un GAS IDEALE; pertanto i rendimenti calcolati in queste condizioni sono maggiori di quelli effettivamente realizzabili e rappresentano il limite ideale di riferimento verso cui tendere con i miglioramenti dei cicli delle macchine reali.

➤ CICLO OTTO

È il ciclo ideale di riferimento per i motori a combustione interna a CARBURAZIONE (o ad ACCENSIONE COMANDATA).

È un ciclo **simmetrico** costituito da DUE ADIABATICHE e da DUE ISOMETRICHE. Rappresentiamolo nei piani p-V e T-S e consideriamo il sistema che evolve costituito da **1 kg di gas ideale** (massa unitaria).



Trasformazione 1-2 COMPRESSIONE ADIABATICA ($Q = 0$)	<ul style="list-style-type: none"> • Diminuisce il volume • Aumentano pressione e temperatura • Si spende il lavoro L_{12} di compressione
Trasformazione 2-3 ISOMETRICA ($L_{23} = 0$)	<ul style="list-style-type: none"> • Aumentano pressione e temperatura • Si somministra al sistema il calore Q_1
Trasformazione 3-4 ESPANSIONE ADIABATICA ($Q = 0$)	<ul style="list-style-type: none"> • Aumenta il volume • Diminuiscono pressione e temperatura • Si ottiene il lavoro L_{34} di espansione
FASE ATTIVA DEL CICLO	
Trasformazione 4-1 ISOMETRICA ($L_{41} = 0$)	<ul style="list-style-type: none"> • Diminuiscono pressione e temperatura in modo da riportare il gas nello stato iniziale • Viene ceduto il calore Q_2 a temperatura inferiore

Per definizione di RENDIMENTO TERMODINAMICO

$$\eta = \frac{L_{CICLO}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Le quantità di calore sono scambiate nelle trasformazioni isometriche, pertanto applicando il 1° principio a tali trasformazioni, si ottiene:

$$Q_2 = Q_{41} = \Delta U = c'_v \cdot (T_4 - T_1) \quad \text{dove le quantità } Q \text{ sono da}$$

$$Q_1 = Q_{23} = \Delta U = c''_v \cdot (T_3 - T_2) \quad \text{considerare in valore assoluto}$$

Pertanto
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{c'_v \cdot (T_4 - T_1)}{c''_v \cdot (T_3 - T_2)} = \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} \quad \text{essendo } c'_v \cong c''_v$$

Vediamo di esprimere tutte le temperature in funzione della temperatura T_1

- Per la trasformazione ADIABATICA 1-2 si può scrivere

$$T_1 \cdot V_1^{k-1} = T_2 \cdot V_2^{k-1} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1} \quad \text{ponendo } \rho = \frac{V_1}{V_2} \quad \text{RAPPORTO DI COMPRESSIONE}$$

si può scrivere
$$\underline{T_2 = T_1 \cdot \rho^{k-1}}$$

Il RAPPORTO DI COMPRESSIONE è il **rapporto tra i volumi prima e dopo la compressione.**

- Poiché il ciclo è SIMMETRICO si può scrivere: $T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_4 \xrightarrow{\text{da cui}} \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$

Chiamando il **rapporto tra le temperature dopo e prima della somministrazione di calore** RAPPORTO DI COMBUSTIONE e indicandolo con β , si può scrivere

$$\beta = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1} \quad \text{RAPPORTO DI COMBUSTIONE}$$

da cui si calcolano i valori delle temperature T_4 e T_3

$$\underline{T_4 = \beta \cdot T_1} \quad ; \quad \underline{T_3 = \beta \cdot T_2 = \beta \cdot T_1 \cdot \rho^{k-1}}$$

Pertanto il rapporto tra calore perduto e calore speso diventa

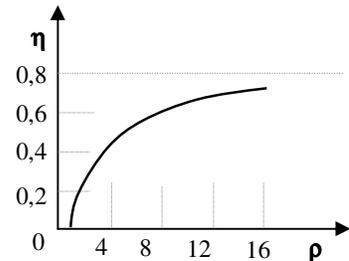
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{\beta \cdot T_1 - T_1}{\beta \cdot T_1 \cdot \rho^{k-1} - T_1 \cdot \rho^{k-1}} = \frac{T_1 \cdot (\beta - 1)}{T_1 \cdot \rho^{k-1} \cdot (\beta - 1)} = \frac{1}{\rho^{k-1}}$$

da cui si calcola il RENDIMENTO TERMODINAMICO DEL CICLO OTTO

$$\underline{\underline{\eta = 1 - \frac{1}{\rho^{k-1}}}} \quad \text{si nota che DIPENDE SOLO DAL RAPPORTO DI}$$

$$\text{COMPRESSIONE } \rho = \frac{V_1}{V_2}$$

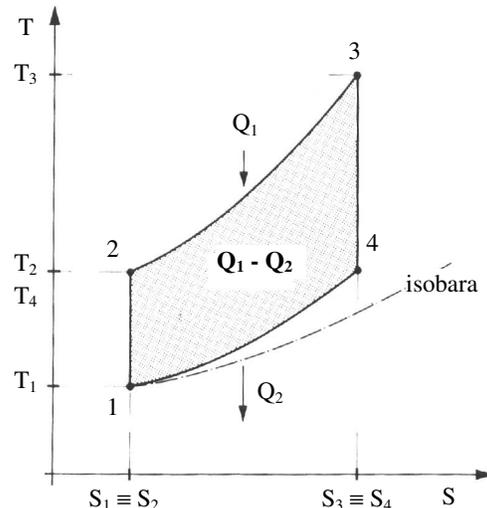
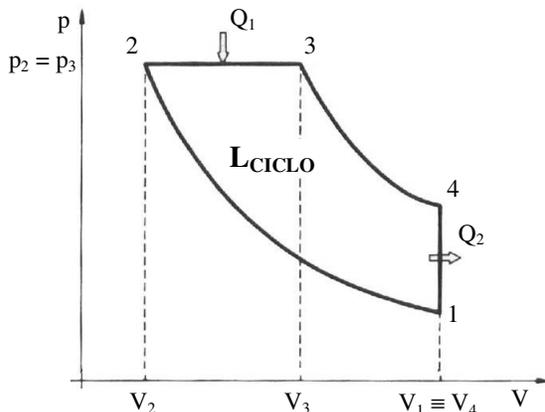
IL RENDIMENTO AUMENTA ALL'AUMENTARE DI TALE RAPPORTO. In figura è riportato un andamento qualitativo della variazione del rendimento al variare del rapporto di compressione.



➤ CICLO DIESEL

È il ciclo ideale di riferimento per i motori a combustione interna a INIEZIONE (o ad ACCENSIONE SPONTANEA).

È costituito da DUE ADIABATICHE, UNA ISOBARA e UNA ISOMETRICA, quindi **non è un ciclo simmetrico**. Rappresentiamolo nei piani p-V e T-S e consideriamo il sistema che evolve costituito da **1 kg di gas ideale** (massa unitaria).



Per definizione di RENDIMENTO TERMODINAMICO

$$\eta = \frac{L_{CICLO}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Dalle definizioni di calore specifico per } m = 1 \text{ kg, si ottiene:} \\ Q_2 = Q_{41} = c_v \cdot (T_4 - T_1) \quad \text{dove le quantità } Q \text{ sono da} \\ Q_1 = Q_{23} = c_p \cdot (T_3 - T_2) \quad \text{considerare in valore assoluto} \end{array} \right.$$

Pertanto
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_p \cdot (T_3 - T_2)} = \frac{1}{k} \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} \quad \text{essendo } k = \frac{c_p}{c_v}$$

Vediamo di esprimere tutte le temperature in funzione della temperatura T_1

- Per la trasformazione ADIABATICA 1-2 si può scrivere

$$\underline{T_2 = T_1 \cdot \rho^{k-1}} \quad \text{come calcolato per il ciclo Otto}$$

- Per DEFINIZIONE DI RAPPORTO DI COMBUSTIONE

$$\beta = \frac{T_3}{T_2} \xrightarrow{\text{si calcola}} T_3 = \beta \cdot T_2 = \beta \cdot T_1 \cdot \rho^{k-1}; \quad \underline{T_3 = \beta \cdot T_1 \cdot \rho^{k-1}}$$

- Per la trasformazione ADIABATICA 3-4 si può scrivere

$$T_4 \cdot V_4^{k-1} = T_3 \cdot V_3^{k-1} \xrightarrow{\text{da cui si calcola}} T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} \quad \text{chiamiamo } \frac{V_4}{V_3} = \sigma \quad \text{RAPPORTO DI ESPANSIONE}$$

Quindi
$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} = T_3 \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{k-1} = T_3 \cdot \frac{1}{\sigma^{k-1}}$$

Per la trasformazione ISOBARA 2-3 si può scrivere

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \xrightarrow{\text{da cui si calcola}} \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} = \beta \quad \text{rapporto di combustione}$$

inoltre, essendo $V_1 = V_4$, dalla definizione di rapporto di compressione, si può scrivere

$$\rho = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_3 \cdot V_2} = \frac{V_4 \cdot V_3}{V_3 \cdot V_2} = \frac{V_4}{V_3} \cdot \frac{V_3}{V_2} = \underbrace{\frac{V_4}{V_3}}_{\sigma} \cdot \underbrace{\frac{V_3}{V_2}}_{\beta} \xrightarrow{\text{da cui si calcola}} \sigma = \frac{\rho}{\beta}$$

Pertanto
$$T_4 = T_3 \cdot \frac{1}{\sigma^{k-1}} = \beta \cdot T_1 \cdot \rho^{k-1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{k-1}} = \frac{\beta \cdot T_1}{\frac{1}{\beta^{k-1}}} = \beta \cdot \beta^{k-1} \cdot T_1 = \beta^k \cdot T_1; \quad \underline{T_4 = \beta^k \cdot T_1}$$

Pertanto il rapporto tra calore perduto e calore speso diventa

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\beta^k \cdot T_1 - T_1}{\beta \cdot T_1 \cdot \rho^{k-1} - T_1 \cdot \rho^{k-1}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{T_1 \cdot (\beta^k - 1)}{T_1 \cdot \rho^{k-1} \cdot (\beta - 1)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\beta^k - 1}{\beta - 1} \cdot \frac{1}{\rho^{k-1}}$$

da cui si calcola il RENDIMENTO TERMODINAMICO DEL CICLO DIESEL

$$\underline{\eta = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{\beta^k - 1}{\beta - 1} \cdot \frac{1}{\rho^{k-1}}} \quad \text{che differisce dal rendimento del ciclo Otto per il termine}$$

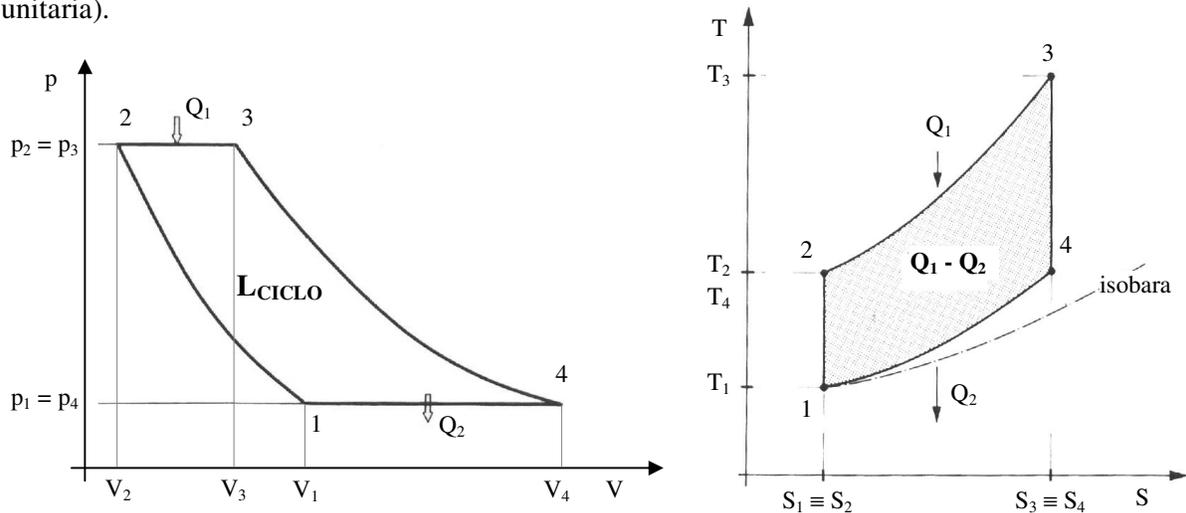
$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\beta^k - 1}{\beta - 1} > 1 \quad \text{SEMPRE}$$

Pertanto A PARITÀ DI RAPPORTO DI COMPRESSIONE ρ il CICLO DIESEL HA UN RENDIMENTO MINORE DEL CICLO OTTO.

➤ **CICLO BRAYTON**

È il ciclo ideale di riferimento per le TURBINE A GAS.

È un ciclo **simmetrico** costituito da DUE ADIABATICHE e da DUE ISOBARE. Rappresentiamolo nei piani p-V e T-S e consideriamo il sistema che evolve costituito da **1 kg di gas ideale** (massa unitaria).



Con ragionamenti analoghi a quelli visti per il ciclo Otto, si dimostra che il RENDIMENTO TERMODINAMICO DEL CICLO BRAYTON vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{\lambda^{\frac{k-1}{k}}} \quad \text{con } \lambda = \frac{p_2}{p_1} \text{ RAPPORTO DI COMPRESSIONE}$$

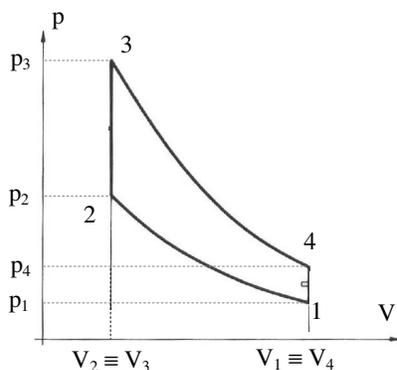
Il RENDIMENTO DIPENDE SOLO DAL RAPPORTO DI COMPRESSIONE: **η aumenta all'aumentare di λ .**

ESERCIZI

Per il CICLO TEORICO DI UN MOTORE A CARBURAZIONE sono assegnati:

- pressione e temperatura di inizio ciclo $p_1 = 1 \text{ atm}$; $T_1 = 330 \text{ K}$
- il rapporto di compressione $\rho = 6$
- il rapporto di combustione $\beta = 3$
- il rapporto tra i calori specifici $k = 1,4$

Determinare i valori di pressione e temperatura negli altri punti caratteristici del ciclo termodinamico ideale e il suo rendimento.



Il ciclo teorico di riferimento per il motore a carburazione è il ciclo Otto. Rappresentiamolo nel piano p-V.

Si devono determinare i valori

$$p_2, p_3, p_4 \quad \text{e} \quad T_2, T_3, T_4$$

Noto il rapporto di compressione, dall'equazione della trasformazione adiabatica 1-2, si può calcolare T_2 , infatti

$$T_1 \cdot V_1^{k-1} = T_2 \cdot V_2^{k-1} \rightarrow \underline{T_2} = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = T_1 \cdot (\rho)^{k-1} = 330 \text{ K} \times (6)^{1,4-1} = \underline{\underline{675 \text{ K}}}$$

Inoltre, sempre per l'adiabatica 1-2 vale l'equazione della trasformazione

$$p_1 \cdot V_1^k = p_2 \cdot V_2^k \rightarrow \underline{p_2} = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = p_1 \cdot (\rho)^k = 1,1 \text{ bar} \times (6)^{1,4} = \underline{\underline{13,51 \text{ bar}}}$$

Dalla definizione di rapporto di combustione

$$\beta = \frac{T_3}{T_2} \xrightarrow{\text{si calcola}} T_3 = \beta \cdot T_2 = 3 \times 657 \text{ K} = \underline{\underline{1971 \text{ K}}}$$

Dall'equazione della trasformazione isometrica 2-3, si può calcolare p_3 , infatti

$$\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_2}{T_2} \xrightarrow{\text{da cui si calcola}} p_3 = p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = p_2 \cdot \beta = 13,51 \text{ bar} \times 3 = \underline{\underline{40,53 \text{ bar}}}$$

Utilizzando le equazioni della trasformazione adiabatica 3-4, si calcolano i valori T_4 e p_4 , infatti

$$T_4 \cdot V_4^{k-1} = T_3 \cdot V_3^{k-1} \rightarrow T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} = T_3 \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^{k-1} = 1971 \text{ K} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{1,4-1} = \underline{\underline{963 \text{ K}}}$$

$$p_4 \cdot V_4^k = p_3 \cdot V_3^k \rightarrow p_4 = p_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^k = p_3 \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^k = 40,53 \text{ bar} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{1,4} \cong \underline{\underline{3,3 \text{ bar}}}$$

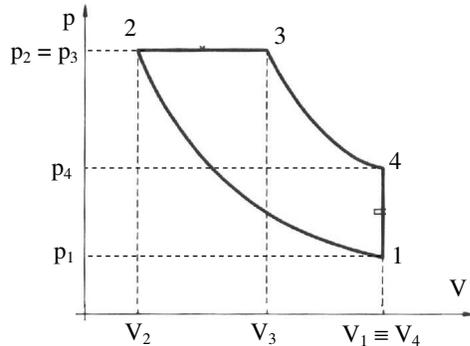
Il RENDIMENTO TERMODINAMICO DIPENDE SOLO DAL RAPPORTO DI COMPRESSIONE; esso vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{\rho^{k-1}} = 1 - \frac{1}{(6)^{1,4-1}} \cong \underline{\underline{0,51}}$$

Per il CICLO TEORICO DI UN MOTORE A DIESEL sono assegnati:

- pressione e temperatura di inizio ciclo $p_1 = 1 \text{ bar}$; $T_1 = 330 \text{ K}$
- il rapporto di compressione $\rho = 18$
- il rapporto di combustione $\beta = 2,71$
- il rapporto tra i calori specifici $k = 1,4$

Determinare i valori di pressione e temperatura negli altri punti caratteristici del ciclo termodinamico ideale e il suo rendimento.



Rappresentiamo il ciclo Diesel nel piano p-V.

Si devono determinare i valori

$$p_2, p_3, p_4 \quad \text{e} \quad T_2, T_3, T_4$$

Nota il rapporto di compressione, dall'equazione della trasformazione adiabatica 1-2, si possono calcolare i valori di T_2 , e p_2 , infatti

$$T_1 \cdot V_1^{k-1} = T_2 \cdot V_2^{k-1} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = T_1 \cdot (\rho)^{k-1} = 330 \text{ K} \times (18)^{1,4-1} = \underline{\underline{1048 \text{ K}}}$$

$$p_1 \cdot V_1^k = p_2 \cdot V_2^k \rightarrow p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = p_1 \cdot (\rho)^k = 1 \text{ bar} \times (18)^{1,4} = \underline{\underline{57,2 \text{ bar}}} = p_3 \quad \text{poiché } 2-3 \text{ è ISOBARA}$$

Dalla definizione di rapporto di combustione

$$\beta = \frac{T_3}{T_2} \xrightarrow{\text{si calcola}} T_3 = \beta \cdot T_2 = 2,71 \times 1048 \text{ K} = \underline{\underline{2840 \text{ K}}}$$

Dall'equazione della trasformazione isobara 2-3, si può calcolare il rapporto V_3/V_4 , infatti

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2} \xrightarrow{\text{da cui si calcola}} \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} = \beta \quad \text{il rapporto } \frac{V_3}{V_4} \text{ si può scrivere}$$

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_4} = \beta \cdot \frac{1}{\rho} \quad (\text{ricorda che } V_4 = V_1)$$

Utilizzando le equazioni della trasformazione adiabatica 3-4, si calcolano i valori T_4 e p_4 , infatti

$$T_4 \cdot V_4^{k-1} = T_3 \cdot V_3^{k-1} \rightarrow \underline{T_4} = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} = T_3 \cdot \left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{k-1} = 1971 K \times \left(\frac{2,71}{18}\right)^{1,4-1} \cong \underline{\underline{1332 K}}$$

$$p_4 \cdot V_4^k = p_3 \cdot V_3^k \rightarrow \underline{p_4} = p_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^k = p_3 \cdot \left(\frac{\beta}{\rho}\right)^k = 57,2 \text{ bar} \times \left(\frac{2,71}{18}\right)^{1,4} \cong \underline{\underline{4 \text{ bar}}}$$

Il RENDIMENTO TERMODINAMICO vale

$$\underline{\underline{\eta}} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{\beta^k - 1}{\beta - 1} \cdot \frac{1}{\rho^{k-1}} = 1 - \left(\frac{1}{1,4} \times \frac{2,71^{1,4} - 1}{2,71 - 1} \times \frac{1}{18^{1,4-1}} \right) = \underline{\underline{0,60}}$$

ESERCIZIO PROPOSTO

Per un ciclo ideale DIESEL (GAS con $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, $c_p = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$) sono noti

- la pressione di aspirazione iniziale $p_1 = 1 \text{ bar}$
- la temperatura iniziale $T_1 = 290 \text{ K}$
- il rapporto di compressione $\rho = 15$
- il rapporto di combustione $\beta = 2,6$

⇒ Rappresentare il ciclo nei piani p-V e T-s e calcolare i valori che assumono le variabili termodinamiche nel punto in cui è massima la temperatura.