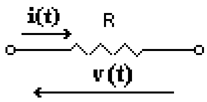
APPENDICE

- Modelli matematici dei componenti R, L, C
- Risposta di un circuito RC nel dominio del tempo con il metodo delle equazioni differenziali
- Trasformata di Laplace
- L-trasformazione dei componenti   R, L,C
- Esempi di risoluzione di equazioni differenziali con la T.d.L.
- Tabelle delle T.d.L.

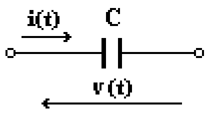
Modelli matematici dei componenti R, L, C

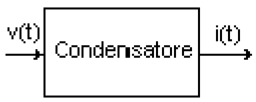
RESISTENZA

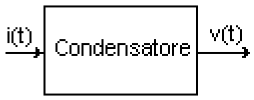


Modello grafico	Relazione ingresso (sollecitazione) - uscita (risposta)
 	$\boxed{v(t) = Ri(t) \quad [1]}$ In ogni istante la tensione ai capi della resistenza è direttamente proporzionale alla corrente. (legge di Ohm) $i(t) = \frac{v(t)}{R}$

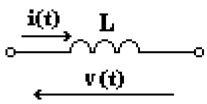
CAPACITÀ



Modello grafico	Relazione ingresso (sollecitazione) - uscita (risposta)
	$\boxed{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \quad [2]}$ La corrente circolante nella capacità è proporzionale alla derivata della tensione. Dimostrazione della [2] Ricordando che: $i(t) = dq/dt \quad [3]$ $dq(t) = Cdv(t) \quad [4]$ sostituendo la [4] nella [3] si ricava la i(t) **Da notare**: se la tensione è costante, cioè non subisce variazioni, la corrente è nulla, di conseguenza la capacità si comporta come circuito aperto

	$\boxed{v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad [5]}$ Dimostrazione della [5] : dalla [2] si ricava che : $dv(t) = \frac{1}{C} i(t)dt$ integrando i due membri si ricava la *v(t)* **Da notare**: Se il condensatore è inizialmente carico occorre tener conto della tensione iniziale Vo $\boxed{v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt + Vo \qquad [6]}$

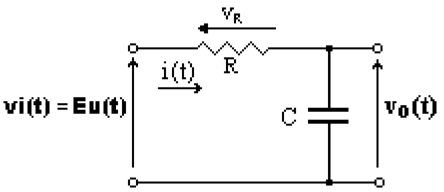
INDUTTANZA



Modello grafico	Relazione ingresso (sollecitazione) - uscita (risposta)
 	$\boxed{v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad [7]}$ La tensione ai capi dell'induttanza L è proporzionale alla derivata della corrente. **Da notare**: se la corrente è costante, cioè non subisce variazioni, a tensione è nulla, di conseguenza l'induttanza si comporta come un cortocircuito. $\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt \qquad [8]}$ Dimostrazione della [8] : dalla [7] si ha che : $di(t) = \frac{1}{L} v(t)dt$ integrando i due membri si ricava la i(t)

Risposta di un circuito RC ad un gradino con il metodo delle equazioni differenziali

Risposta di un circuito RC ad un gradino di tensione di ampiezza E con l'ipotesi che C sia inizialmente scarico.



$v_R + v_o = E$

- Ricaviamo la v_R

  $v_R(t) = R\ i(t);\quad e\quad i(t) = C\dfrac{dv_o}{dt}:$

  quindi:

  $v_R = RC\dfrac{dv_o}{dt}$

- sostituendo v_R si ha:

  $\boxed{RC\dfrac{dv_o}{dt} + v_0 = E}$ (relazione ingresso uscita)

- Per ricavare l'andamento della $v_o(t)$, bisogna risolvere l'eq. differenziale lineare del 1° ordine

$$RC\frac{dv_o}{dt} = E - v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{RC}(E - v_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_o}{E - v_0} = \frac{1}{RC}dt$$

$$\int \frac{dv_0}{E - v_0} = \int \frac{1}{RC}dt \quad \Rightarrow \quad -\int \frac{-dv_0}{E - v_0} = \int \frac{1}{RC}dt$$

$$-\ln(E - v_0) = \frac{1}{RC}t + C \quad \Rightarrow \quad E - v_0 = e^{-\frac{1}{RC}t+C} \quad \Rightarrow \quad v_0(t) = E - e^{-\frac{1}{RC}t+C}$$

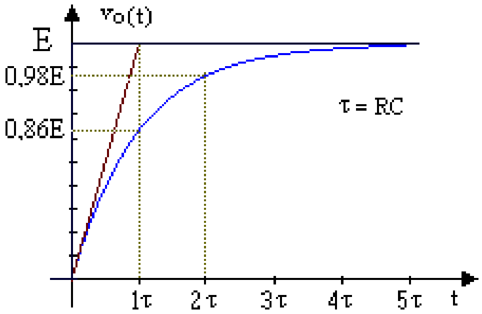
$$\Rightarrow \quad v_0(t) = E - e^{-\frac{1}{RC}t} \cdot e^{C}$$

Imponendo le condizioni iniziali $v_o(t=0) = 0$ condensatore inizialmente scarico, si calcola la costante C

$$E - e^{-\frac{1}{RC}0} \cdot e^{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad E - e^{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = e^{C}$$

Sostituendo si ha:

$$v_0(t) = E - e^{-\frac{1}{RC}t} \cdot E \quad \Rightarrow \quad v_0(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



Trasformata di Laplace

La T.d.L è un operatore matematico che permette di convertire una funzione del tempo f(t) in una funzione di variabile complessa F(s).

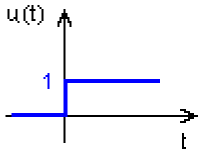
Definizione della T.d.L.

$$\boxed{F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot f(t)dt}$$

La T.d.L è detta unilaterale perché la f(t) è definita solo per $t \geq 0$

Esempio di calcolo: T.d.L del gradino di tensione unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0 & per \quad t<0 \\ 1 & per \quad t>0 \end{cases}$$



La L-trasformata del gradino unitario è

$$\mathrm{L}\left[u(t)\right]=\frac{1}{s}$$

Dimostrazione:

$$\mathrm{L}\,[u(t)] = \int_0^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}dt =$$

$$=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}=$$

$$=\left[-\frac{1}{s}e^{-s\infty}-\left(-\frac{1}{s}e^{-s0}\right)\right]=$$

$$=\left[0-\left(-\frac{1}{s}\right)\right]=\frac{1}{s}$$

Le proprietà della T.d.L.

- **Teorema della moltiplicazione per una costante**

$L\,[k \cdot f(t)] = k \cdot L[f(t)]$	La trasformata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la trasformata della funzione

- **Teorema della somma**

$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)]$	La somma di due funzioni nel dominio del tempo corrisponde alla somma delle trasformate nel dominio complesso

- **Teorema della derivata**

$\mathbf{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s)$	La T.d.L della derivata di una funzione f(t) è uguale al prodotto della T.d.L. della funzione per la variabile complessa

Da notare:

Se le condizioni iniziali non sono nulle, cioè la $f(t{=}0) \neq 0$, allora: $\mathbf{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0)$

Per estensione la derivata seconda è la seguente $\mathbf{L}\left[\dfrac{df^2(t)}{dt^2}\right] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$

- **Teorema dell'integrale**

$\mathbf{L}\left[\int f(t)dt\right] = \dfrac{F(s)}{s}$	La T.d.L. dell'integrale di una funzione f(t) è uguale alla T.d.L della funzione divisa per la variabile s

Teorema del valore iniziale $f(0) = \lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{s \to \infty} s \cdot F(s)$	Questo teorema consente di determinare il valore assunto dalla f(t) all'istante t=0, conoscendo la T.d.L. di f(t) cioè la F(s), senza ricorrere all'operazione di antitrasformazione.

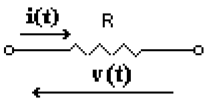
- **Teorema del valore finale**

$f(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to 0} s \cdot F(s)$	Questo teorema consente di determinare il valore assunto dalla f(t) a regime (cioè per t tendente ad infinito), conoscendo la T.d.L. di f(t) cioè la F(s), senza ricorrere all'operazione di antitrasformazione.

L- trasformazione dei componenti R, L, C

2.7.1 RESISTENZA

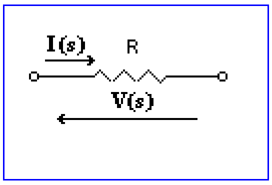
dominio del tempo



$v(t) = R \cdot i(t)$

dominio complesso

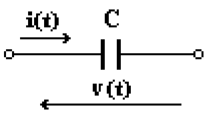
$V(s) = \mathrm{L}\,[\mathrm{v(t)}] = R \cdot I(s)$



La resistenza non subisce trasformazioni. R è uguale al rapporto tra V(s), trasformata della tensione e la I(s), trasformata della corrente

---

dominio del tempo



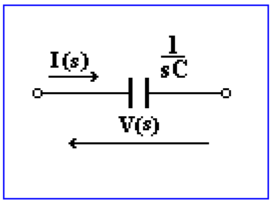
$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt + \mathrm{Vo}$

Vo è la carica iniziale

dominio complesso

Considerando il condensatore inizialmente scarico (Vo=0)

$V(s) = \mathrm{L}\,[\mathrm{v(t)}] = \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s}$

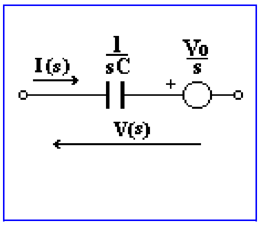


La capacità si trasforma in una impedenza capacitiva di valore:

$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{s \cdot C}$

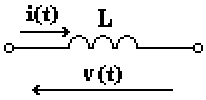
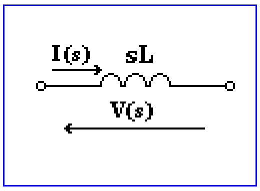
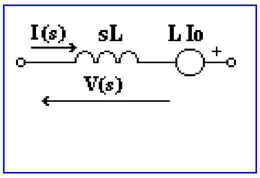
- Se invece il condensatore inizialmente è carico alla tensione Vo:

$V(s) = \mathrm{L}\,[\mathrm{v(t)}] = \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} + \frac{Vo}{s}$



La capacità si trasforma in un impedenza di valore $\frac{1}{s \cdot C}$, in serie ad un generatore di tensione $\frac{Vo}{s}$

1.7.3 INDUTTORE

dominio del tempo	dominio complesso
 $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	Se inizialmente l'induttanza non è percorsa da corrente $V(s) = L[v(t)] = sL \cdot I(s)$  L'induttanza si trasforma in una impedenza induttiva di valore: $\dfrac{V(s)}{I(s)} = sL$ • Se invece inizialmente è percorsa da una corrente di valore Io $V(s) = L[v(t)] = sL \cdot I(s) - LIo$  L'induttanza si trasforma in una impedenza induttiva di valore **sL** in serie ad un generatore di tensione di valore **L Io**

Risoluzione di equazioni differenziali con il metodo della trasformata di Laplace

Equazioni differenziali lineari del 1°

Esercizio 1

y' = 2y+10 ; condizione iniziale: y(0) = 0
dove y'=dy/dt

Soluzione:

- Ricordando che:

  L [y'(t)] = s y(s) - y(0),

- Applicando la tdL l'eq. differenziale data si trasforma in eq. algebrica

  sy(s) = 2y(s) +10/s

$$y(s) = \frac{10}{s}\frac{1}{(s-2)}$$

- Antitrasformando, facendo uso della tabella

rigo	f(t)	L [f(t)]
9	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$

$$y(t) = \frac{10}{2}\cdot\left(1-e^{2t}\right)$$

Equazioni differenziali lineari del 2° ordine a coefficienti costanti

Esercizio 1

y'' +5y'+6y =10 ; condizioni iniziali y'(0) = -8 , y(0) = 0
dove : $y'' = d^2y/dt^2$, y'= dy/dt

Soluzione:

Ricordando che:

$$\mathbf{L}\,[y'] = s \cdot Y(s) - y(0)$$
$$\mathbf{L}\,[y''] = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)$$

Applicando la tdL si ha:

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)] + 5[sY(s)-y(0)] + 6Y(s) = 10/s$$

sostituendo le condizioni iniziali si ottiene:

$$s^2Y(s)+8 + 5sY(s) + 6Y(s) = 10/s$$

da cui:

$$Y(s)\ [s^2 +5s +6] +8 = 10/s$$
$$Y(s)\ s[s^2 +5s +6] = 10 -8s$$

Antitrasformando:

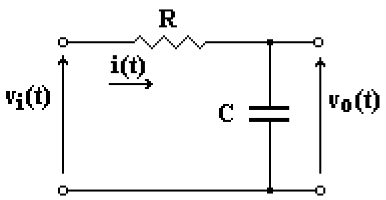
$$Y(s) = \frac{10-8s}{s\left(s^2+5s+6\right)}$$

Esercizio 2

Risolvere l' equazione differenziale con la T.d.L.

$$RC\frac{dVo(t)}{dt}+Vo(t)=E$$

condizione iniziale: Vo(t=0) = 0



Essa rappresenta la risposta del circuito RC ad un gradino di tensione di ampiezza E , considerando C inizialmente scarico. (vedi pag. A-4)

Soluzione

- Si trasforma l'eq.differenziale in equazione algebrica

$$RC\cdot sVo(s)+Vo(s)=\frac{E}{s}$$ si ricorda che la $\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$

- Si ricava l'uscita *Vo(s)*

$$Vo(s)=\frac{E}{s}\frac{1}{(1+sRC)}$$

- Si antitrasforma la *Vo(s)*

$$vo(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$