Capitolo

4

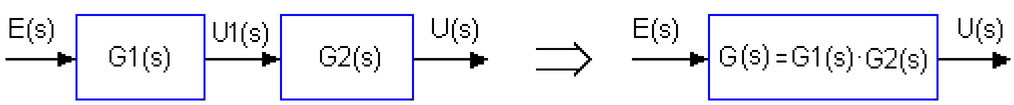
Semplificazioni di schemi a blocchi

ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

L'algebra degli schemi a blocchi è un insieme di operazioni che permettono di semplificare schemi complessi

4.1 BLOCCHI IN CASCATA

Due blocchi sono connessi in cascata quando l'uscita del primo è il segnale d'ingresso del secondo.



La funzione di trasferimento di più blocchi in cascata è data dal prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli blocchi.

Nel nostro caso $G(s) = G1(s) \cdot G2(s)$

Dimostrazione che $G(s) = G1(s) \cdot G2(s)$

$$G1(s) = \frac{U1(s)}{E(s)} \quad \text{f.d.t. del primo blocco}$$

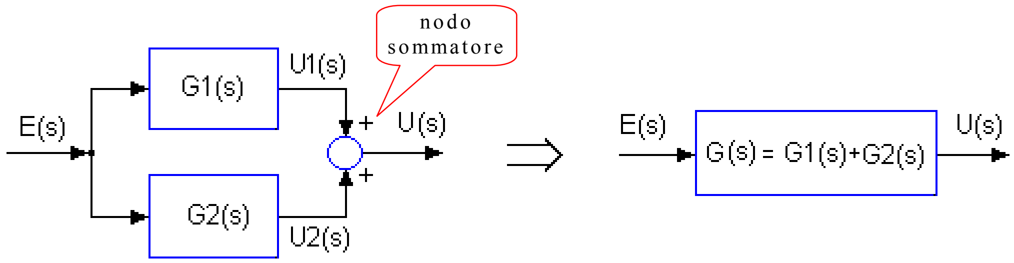
$$G2(s) = \frac{U(s)}{U1(s)} \quad \text{f.d.t. del secondo blocco}$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \quad \text{f.d.t. del sistema}$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\cancel{U1(s)}}{E(s)} \cdot \frac{U(s)}{\cancel{U1(s)}} = G1(s) \cdot G2(s)$$

4.2 BLOCCHI IN PARALLELO

Due blocchi sono connessi in parallelo quando ricevono lo stesso segnale d'ingresso e le loro uscite sono sommate



La funzione di trasferimento di più blocchi in parallelo è data dalla somma delle funzioni di trasferimento dei singoli blocchi

Nel nostro caso: $G(s) = G1(s) + G2(s)$

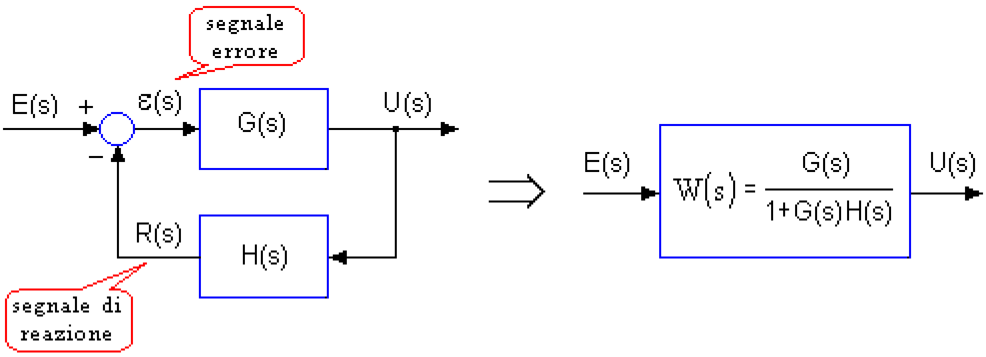
$\boxed{\text{Dimostrazione che} \quad G(s) = G1(s) + G2(s)}$

$$G1(s) = \frac{U1(s)}{E(s)} \quad ; \quad G2(s) = \frac{U2(s)}{E(s)} \quad ; \quad G(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{U1(s) + U2(s)}{E(s)} = \frac{U1(s)}{E(s)} + \frac{U2(s)}{E(s)} = G1(s) + G2(s)$$

4.3 BLOCCHI IN CATENA CHIUSA (reazione negativa)

Lo schema di un sistema a catena chiusa in reazione negativa è il seguente:



In questo sistema il nodo sommatore effettua la differenza tra il segnale d'ingresso e quello di reazione.

$W(s) = \dfrac{U(s)}{E(s)}$ f.d.t. ad anello chiuso ; $H(s) = \dfrac{R(s)}{U(s)}$ f.d.t. del blocco di reazione

$L(s) = G(S) \cdot H(S)$ f.d.t. ad anello aperto

Dimostrazione che $W(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

$U(s) = G(s) \cdot \varepsilon(s)$ [1]

dove:

$\varepsilon(s) = E(s) - R(s) = E(s) - H(s)U(s)$ [2]

sostituendo la [2] nella [1] si ottiene $U(s) = G(s) \cdot [E(s) - H(s)U(s)]$

risolvendo rispetto ad U(s) si ottiene:

$$U(s) = G(s)E(s) - G(s)H(s)U(s) \quad \Rightarrow \quad U(s) \cdot [1 + G(s)H(s)] = G(s)E(s)$$

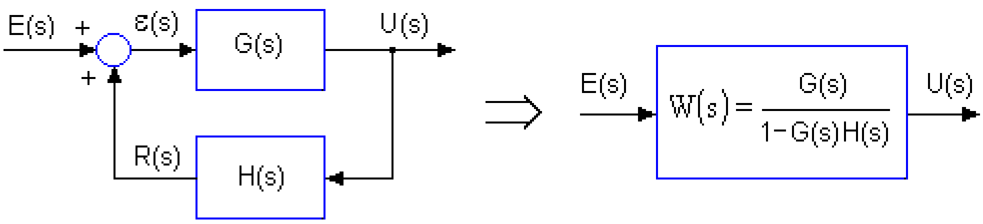
$$U(s) = \frac{G(s)E(s)}{1+G(s)H(s)}$$

dividendo entrambi i membri per E(s) si ricava la $W(s)$:

$$W(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad \text{c.v.d.}$$

4.4 BLOCCHI IN CATENA CHIUSA (reazione positiva)

Lo schema di un sistema a catena chiusa in reazione positiva è il seguente:



In questo sistema il nodo sommatore effettua la somma tra il segnale d'ingresso e quello di reazione.

Dimostrazione che $W(s) = \dfrac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$

$$U(s) = G(s)\cdot\varepsilon(s) \qquad [1]$$

dove:

$$\varepsilon(s) = E(s)+R(s) = E(s)+H(s)U(s) \qquad [2]$$

sostituendo la [2] nella [1] si ottiene $U(s) = G(s)\cdot[E(s)+H(s)U(s)]$

risolvendo rispetto ad U(s) si ottiene:

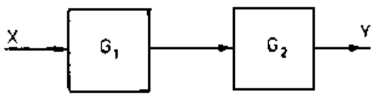
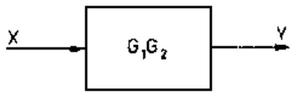
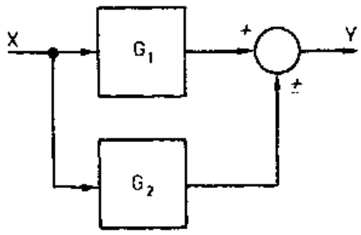
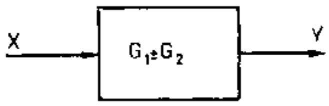
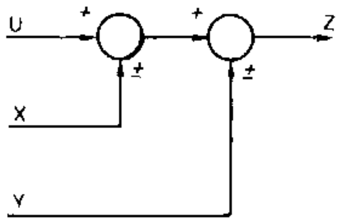
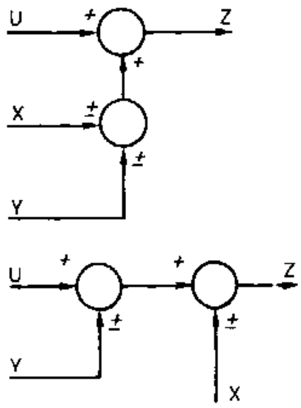
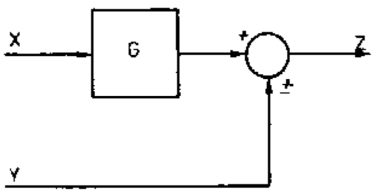
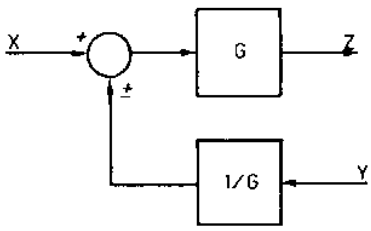
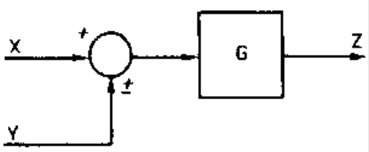
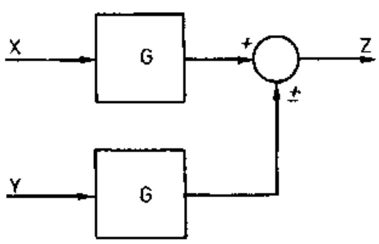
$$U(s) = G(s)E(s)+G(s)H(s)U(s) \quad \Rightarrow \quad U(s)\cdot[1-G(s)H(s)] = G(s)E(s)$$

$$U(s) = \frac{G(s)E(s)}{1-G(s)H(s)}$$

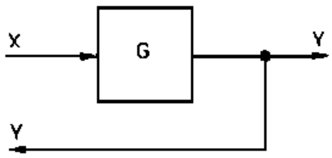
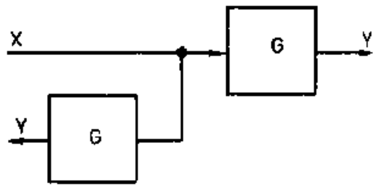
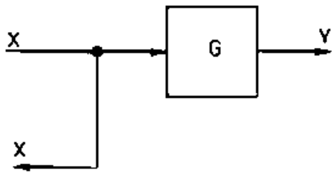
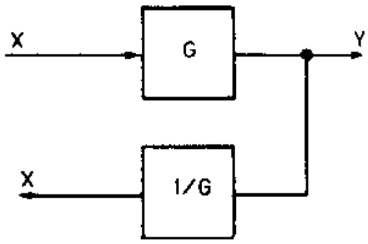
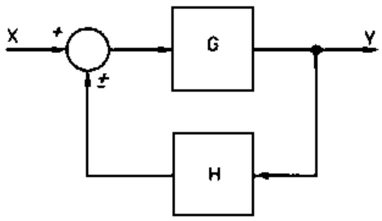
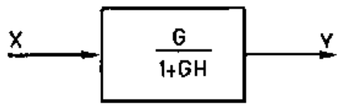
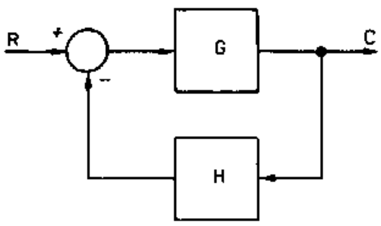
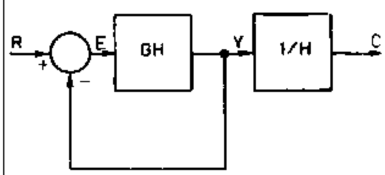
dividendo entrambi i membri per E(s) si ricava la $W(s)$:

$$W(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)} \qquad \text{c.v.d.}$$

Tab. VI.2.2. Regola di riduzione degli schemi a blocchi [1]

Regola	Schema originario	Schema equivalente
Riduzione di blocchi in cascata		
Riduzione di blocchi in parallelo		
Scambio di sommatori		
Spostamento di un sommatore a monte di un blocco		
Spostamento di un sommatore a valle di un blocco		

Tab. VI.2.2. Regola di riduzione degli schemi a blocchi (*segue*)

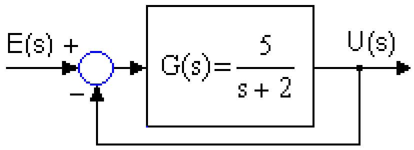
Regola	Schema originario	Schema equivalente
Spostamento di un punto di diramazione a monte di un blocco		
Spostamento di un punto di diramazione a valle di un blocco		
Riduzione dell'anello di retroazione		
Eliminazione del blocco nella linea di retroazione		

[1] VI-16 Manuale di Elettronica e Telecomunicazioni - Hoepli

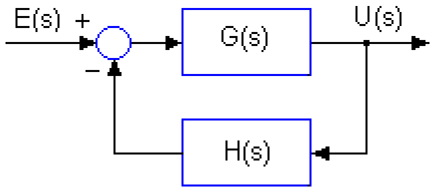
4.6 ESERCIZI

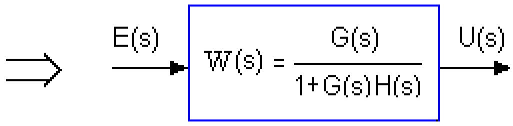
Esercizio 1

Determinare la f.d.t. ad anello chiuso



Il circuito retroazionato è equivalente al circuito in figura





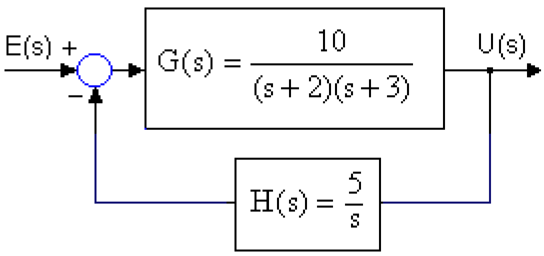
$$G(s) = \frac{5}{s+2} \qquad \text{e} \qquad H(s)=1$$

sostituendo:

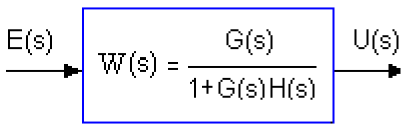
$$W(s) = \frac{\frac{5}{s+2}}{1+\frac{5}{s+2}} = \frac{\frac{5}{s+2}}{\frac{s+2+5}{s+2}} = \frac{5}{s+7}$$

Esercizio 2

Determinare la f.d.t. ad anello chiuso



Il circuito equivalente e:



$$L(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{5}{s} = \frac{50}{s(s+2)(s+3)} \qquad \text{(f.d.t. ad anello aperto)}$$

sostituendo:

$$W(s) = \frac{\dfrac{10}{(s+2)(s+3)}}{1+\dfrac{50}{s(s+2)(s+3)}} = \frac{10s}{s(s+2)(s+3)+50} = \frac{10s}{s^3+5s^2+6s+50}$$

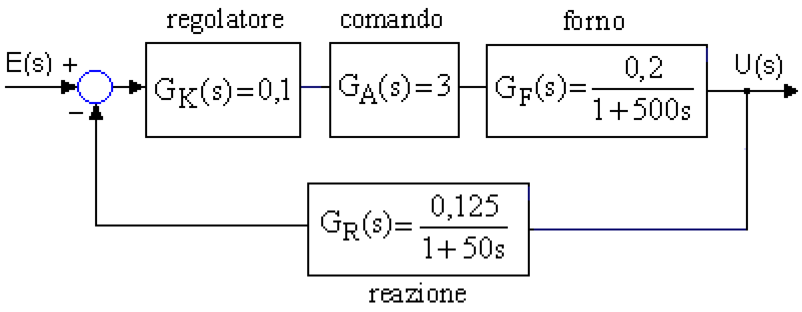
Esercizio 3

Uno stabilimento utilizza, per la cottura di merendine, un sistema di controllo di temperatura a catena chiusa. Sapendo che le funzioni di trasferimento del regolatore, del circuito di comando, del forno e del circuito di reazione(termocoppia e circuito di condizionamento) sono rispettivamente:

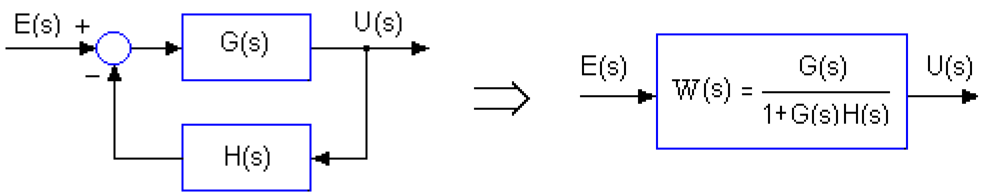
$$G_K(s) = 0{,}1 \qquad G_A(s) = 3 \qquad G_F(s) = \frac{0{,}2}{1+500s} \qquad G_R(s) = \frac{0{,}125}{1+50s}$$

Determinare la f.d.t. complessiva del sistema

Soluzione



Il circuito equivalente e:



$$G(s) = 0{,}1 \cdot 3 \cdot \frac{0{,}2}{1+500s} = \frac{0{,}06}{1+500s} \quad ; \quad H(s) = \frac{0{,}125}{1+50s}$$

$$L(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{0{,}06}{1+500s} \cdot \frac{0{,}125}{1+50s} = \frac{0{,}0075}{(1+50s)\cdot(1+500s)}$$

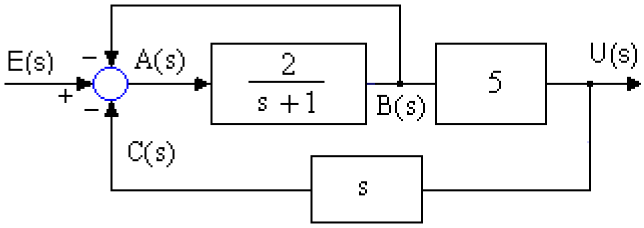
sostituendo:

$$W(s) = \frac{\dfrac{0,06}{1+500s}}{1+\dfrac{0,0075}{(1+50s)\cdot(1+500s)}} = \frac{\dfrac{0,06}{1+500s}}{\dfrac{(1+50s)\cdot(1+500s)+0,0075}{(1+50s)\cdot(1+500s)}} =$$

$$= \frac{0,06\cdot(1+50s)}{(1+50s)\cdot(1+500s)+0,0075} \cong \frac{0,06\cdot(1+50s)}{25000s^2+550s+1}$$

Esercizio 4

Ricavare la f.d.t. del sistema



1° Metodo

Nel nodo d'ingresso

$$A = E - B - C \qquad \Rightarrow \qquad E = A + B + C \qquad [1]$$

Calcolo di C in funzione di U

$$C = s\cdot U$$

Calcolo di B in funzione di U

$$U = 5\cdot B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{5}U$$

Calcolo di A in funzione di U

$$B = \frac{2}{s+1}A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{s+1}{2}B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{s+1}{2}\cdot\frac{1}{5}U \quad \Rightarrow \quad A = \frac{s+1}{10}U$$

Sostituendo nella [1] si ha:

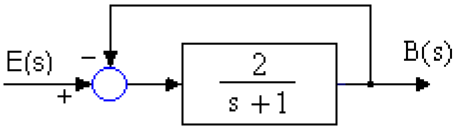
$$E = \frac{s+1}{10}U + \frac{1}{5}U + s\cdot U \quad \Rightarrow \quad E = \left[\frac{s+1}{10}+\frac{1}{5}+s\right]\cdot U \quad \Rightarrow$$

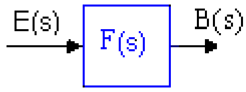
$$E = \frac{11s+3}{10}U \quad \Rightarrow \quad U = \frac{10}{11s+3}E$$

Dalla quale si ottiene:

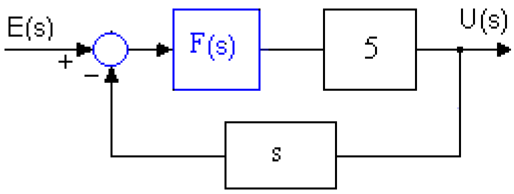
$$W(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{10}{11s+3}$$

2° Metodo





$$F(s) = \frac{\dfrac{2}{s+1}}{1+\dfrac{2}{s+1}} = \frac{2}{s+3}$$

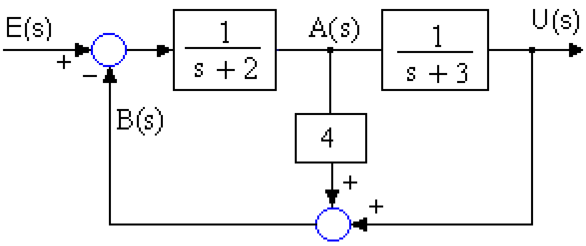


$$G(s) = 5 \cdot F(s) = \frac{10}{s+3} \qquad \text{e} \qquad G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{s+3} \cdot s = \frac{10s}{s+3}$$

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)} = \frac{\dfrac{10}{s+3}}{1+\dfrac{10s}{s+3}} = \frac{10}{11s+3}$$

<u>Esercizio 5</u>

Ricavare la f.d.t. del sistema.



$$A = \frac{1}{s+2}[E - B] \quad [1]$$

$$B = 4 \cdot A + U \qquad [2]$$

sostituendo la [2] nella [1]

$$A = \frac{1}{s+2}\left[E - 4A - U\right] \qquad [3]$$

ricavo A in Funzione di U

$$U = \frac{1}{s+3}A \quad \Rightarrow \quad A = (s+3)\cdot U \qquad [4]$$

sostituendo la [4] nella [3]

$$(s+3)\cdot U = \frac{1}{s+2}\left[E - 4(s+3)\cdot U - U\right]$$

$$(s+3)\cdot U = \frac{1}{s+2}E - \frac{4(s+3)}{s+2}U - \frac{1}{s+2}U$$

$$(s+3)\cdot U(s) + \frac{4(s+3)}{s+2}U + \frac{1}{s+2}U = \frac{1}{s+2}E$$

$$\left[(s+3)(s+2) + 4(s+3) + 1\right]\cdot U = E$$

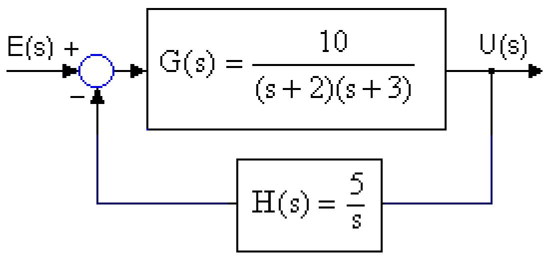
$$\left(s^2 + 9s + 19\right)\cdot U = E$$

dalla quale si ottiene:

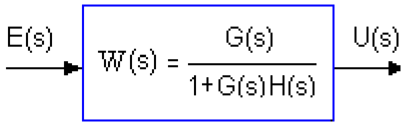
$$W(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^2 + 9s + 19}$$

<u>Esercizio 6</u>

Ricondurre ad uno schema a reazione unitaria



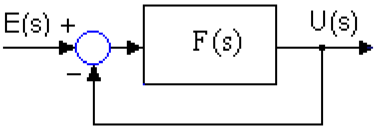
Il circuito equivalente e:



sostituendo:

$$W(s)=\frac{\dfrac{10}{(s+2)(s+3)}}{1+\dfrac{50}{s(s+2)(s+3)}}=\frac{10s}{s(s+2)(s+3)+50}=\frac{10s}{s^3+5s^2+6s+50}$$

Lo schema a reazione unitario è:



$$W(s)=\frac{F(s)}{1+F(s)}$$

uguagliando si ricava F(s)

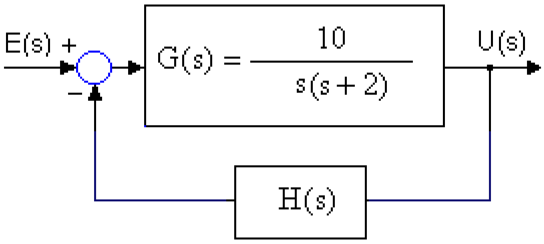
$$\frac{F(s)}{1+F(s)}=\frac{10s}{s^3+5s^2+6s+50}$$

$$F(s)\cdot(s^3+5s^2+6s+50)=10s\cdot(1+F(s))$$
$$F(s)\cdot(s^3+5s^2+6s+50)-10s\cdot F(s)=10s$$
$$F(s)\cdot(s^3+5s^2+6s+50-10s)=10s$$
$$F(s)=\frac{10s}{s^3+5s^2-4s+50}$$

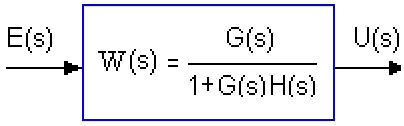
Esercizio 7.

Determinare la f.d.t. del blocco di reazione

$$W(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{10}{s^2+2s+10}$$



Il circuito equivalente è:



uguagliando si ricava H(s)

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{10}{s^2+2s+10}$$

$$\frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1+\frac{10}{s(s+2)}H(s)} = \frac{10}{s^2+2s+10} \Rightarrow \quad \frac{10}{s(s+2)+10\cdot H(s)} = \frac{10}{s^2+2s+10}$$

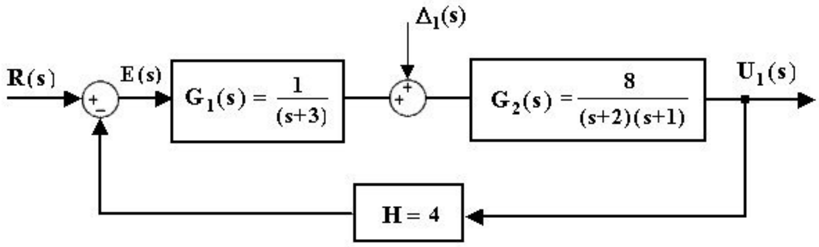
$$\frac{10}{s^2+2s+10\cdot H(s)} = \frac{10}{s^2+2s+10}$$

consegue

H(s)=1

Esercizio 8

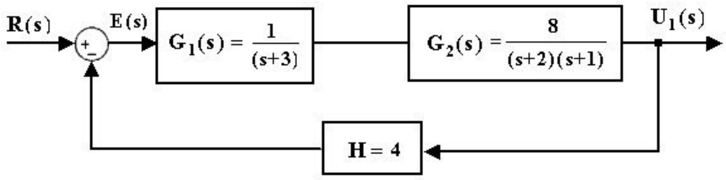
Determinare l'uscita del sistema ad anello chiuso in presenza del disturbo $\Delta_1(s)$



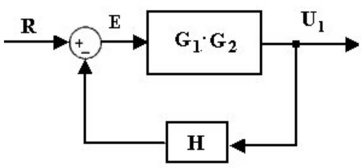
Soluzione

Per determinare l'uscita applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti.

- **Consideriamo agente solo il segnale R(s) indi poniamo $\Delta_1(s) = 0$**



Riducendo i due blocchi in cascata ad un solo blocco si ha:



$$W_1 = \frac{U_1}{R} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2 \cdot H}$$

$$W_1(s) = \frac{\dfrac{8}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1 + \dfrac{32}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{8}{(s+1)(s+2)(s+3)+32} =$$

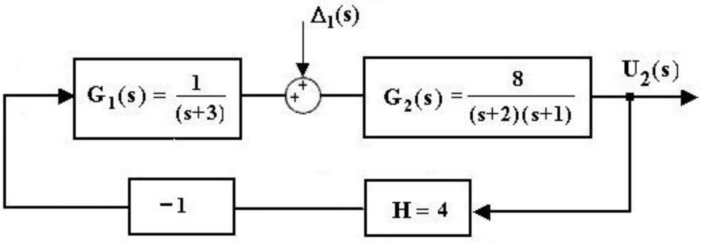
$$\frac{8}{(s^2+3s+2)(s+3)+8} = \frac{8}{(s^2+3s+2)(s+3)+32}$$

dalla quale si ottiene:

$$\boxed{W_1(s) = \frac{8}{s^3+6s^2+11s+38} \quad \text{(f.d.t. del sistema in assenza del disturbo)}}$$

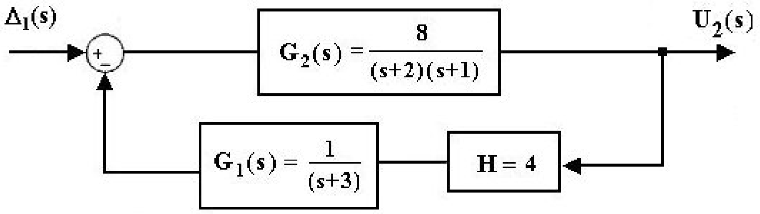
$$U_1(s) = R(s) \cdot \frac{8}{s^3+6s^2+11s+38} \quad \text{(uscita complessa in assenza del disturbo)}$$

- **Consideriamo ora, agente solo il disturbo $\Delta_1(s)$, indi poniamo R(s) = 0**

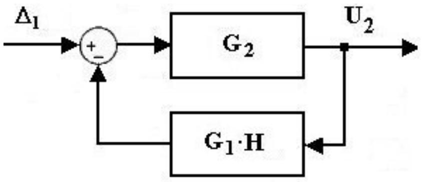


Nota: il blocco –1 è dovuto al nodo sommatore che ora svolge la funzione invertente

Lo schema è equivalente è:



Riducendo i due blocchi in cascata ad un solo blocco si ha



$$W_2 = \frac{U_2}{\Delta_1} = \frac{G_2}{1 + G2 \cdot G_1 \cdot H}$$

$$W_2 = \frac{\dfrac{8}{(s+1)(s+2)}}{1 + \dfrac{32}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{\dfrac{8}{(s+1)(s+2)}}{\dfrac{(s+1)(+2)(s+3)+32}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{8(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

dalla quale si ottiene

$$\boxed{W_2(s) = \frac{U_2(s)}{\Delta_1(s)} = \frac{8(s+3)}{s^3 + +6s^2 + 11s + 38} \qquad \text{(f.d.t. del disturbo)}}$$

$$U_2(s) = \Delta_1(s) \cdot \frac{8(s+3)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 38} \qquad \text{(uscita complessa dovuta al solo disturbo)}$$

$$U(s) = U_1(s) + U_2(s) \qquad \text{(risposta complessa del sistema)}$$