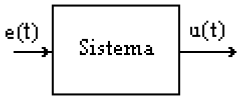
Capitolo

5

Il comportamento dei sistemi in regime transitorio

5.1 GENERALITÀ SULLA RISPOSTA DEI SISTEMI NEL DOMINIO DEL TEMPO

Consideriamo un generico sistema



Se il segnale d'ingresso e(t) subisce brusche variazioni, il segnale d'uscita (risposta del sistema) è costituito dalla somma di una risposta transitoria ed una risposta permanente (o risposta a regime).

Per determinare il segnale d'uscita u(t), si procede nel seguente modo:

1. Si determina la G(s) G(s) = U(s)/E(s)
2. Si determina la E(s), facendo uso delle tabelle delle Td.L
3. Si calcola l'uscita U(s) =G(s)*E(s)
4. Si antitrasforma la U(s) per risalire alla u(t)

Calcolo del valore iniziale e del valore finale della risposta

a) Se è nota la u(t)

$u(0) = \lim_{t\to 0} u(t)$; $u(\infty) = \lim_{t\to\infty} u(t)$

b) Se è nota la U(s)

- **Teorema del valore iniziale**

$U_i = u(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot U(s)$

Il teorema del valore iniziale ci fornisce la risposta di un sistema all'istante t=0

- **Teorema del valore finale**

$U_f = u(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot U(s)$

Il teorema del valore finale ci fornisce la risposta di un sistema all'istante t=∞

Nota: il teorema del valore finale si può applicare solo se U(s) non ha poli nel semipiano positivo, incluso l'asse immaginario ed escluso l'origine.

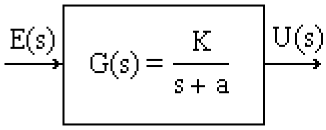
<u>**Classificazioni dei sistemi per ordine**</u>

La classificazione per ordine di un sistemi viene fatto in relazione al numero di poli della sua f.d.t.
Un sistema quindi dicesi di:

- **ordine zero** quando la sua f.d.t. non presenta poli
- **ordine uno** quando la sua f.d.t. presenta un polo (denominatore della f.d.t. è un polinomio di primo grado)
- **ordine due** quando la sua f.d.t. presenta 2 poli (denominatore della f.d.t. è un polinomio di secondo grado)

5.2 RISPOSTA AL GRADINO DI UN SITEMA DEL 1° ORDINE

Consideriamo un sistema del 1° ordine con un polo reale negativo (a<0), eccitato da un gradino di ampiezza E



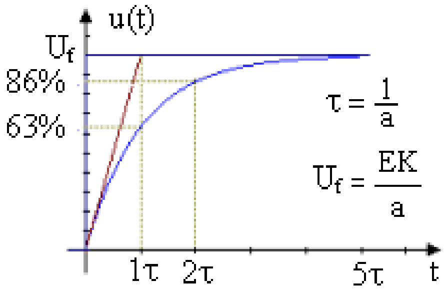
- **Calcolo della U(s)**

U(s) = E(s)*G(s)

Essendo l'ingresso un gradino di ampiezza E $\Rightarrow$ E(s)=E/s,

sostituendo si ha : $U(s) = E(s)*G(s) = \frac{E}{s}\frac{K}{s+a}$

La risposta u(t) ha un andamento esponenziale crescente.



- <u>**Calcolo del valore finale u(∞)**</u>

$$U_f = u(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot U(s) \;=\; \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{E}{s}\frac{K}{s+a} = \frac{EK}{a}$$

- <u>**Calcolo della risposta u(t)**</u>

$$U(s) = E(s)*G(s) = \frac{E}{s}\frac{K}{s+a}$$

Antitrasformando facendo uso della tabella delle T.d.L rigo 9, si ricava la u(t)

N°	Funzione $f(t)$ per $t \geqslant 0$	$L[f(t)]$
9	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$

$$\mathbf{u(t)} = \frac{EK}{a}\,\mathbf{(\,1\text{-}e^{-at}\,)}$$

$$U_i = u(0) = \lim_{t\to 0} u(t) = 0\ ;\ Vfin = u(\infty) = \lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{EK}{a}(1\text{-}e^{-at}) = \frac{EK}{a}$$

5.3 ESERCIZI - RISPOSTA AL GRADINO DEI SISTEMI DEL 1° ORDINE REAZIONATI E NON REAZIONATI

Es.1.
Determinare l'uscita u(t) di un sistema del primo ordine caratterizzato dalla seguente f.d.t

$$G(s) = \frac{5}{s+2}$$

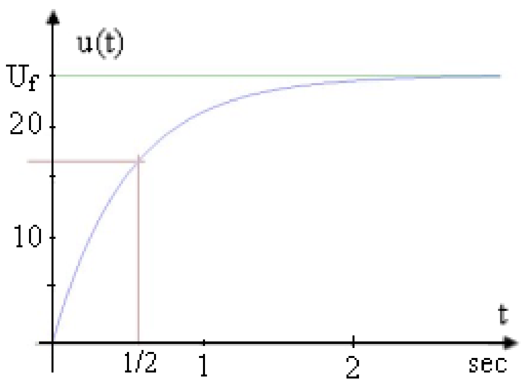
quando all'ingresso è applicato un gradino di ampiezza 10

- **Calcolo della u(t)**

L'uscita vale: U(s) = E(s)*G(s)
Essendo in questo caso l'ingresso un gradino di ampiezza 10 $\Rightarrow$ E(s)=10/s,
sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{10}{s}\frac{5}{s+2}$$

Antitrasformando la U(s) si ha: $u(t) = \frac{10 \cdot 5}{2}(1\text{-}e^{-2t}) = 25(1\text{-}e^{-2t})$



- Calcolo della costante di tempo τ, del valore iniziale e quello finale

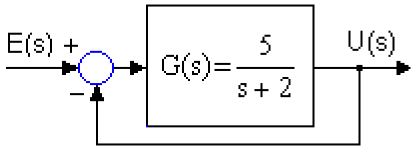
τ =1/2 sec

$$U_i = u(0) = \lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{t\to 0} 25(1\text{-}e^{-2t}) = 0$$

$$U_f = u(\infty) = \lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} 25(1\text{-}e^{-2t}) = 25$$

Es. 2

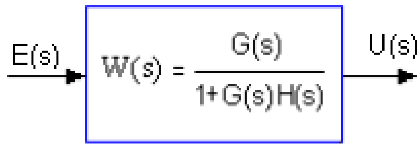
Determinare l'uscita u(t) di un sistema del primo ordine retroazionato, per semplicità a reazione unitaria



quando all'ingresso è applicato un gradino di ampiezza 10

- **Calcolo della f.d.t. del sistema retroazionato W(s)**

Il circuito retroazionato è equivalente al circuito in figura con H(s)=1



$$W(s) = \frac{\frac{5}{s+2}}{1+\frac{5}{s+2}} = \frac{\frac{5}{s+2}}{\frac{s+2+5}{s+2}} = \frac{5}{s+2}\cdot\frac{s+2}{s+7} = \frac{5}{s+7}$$

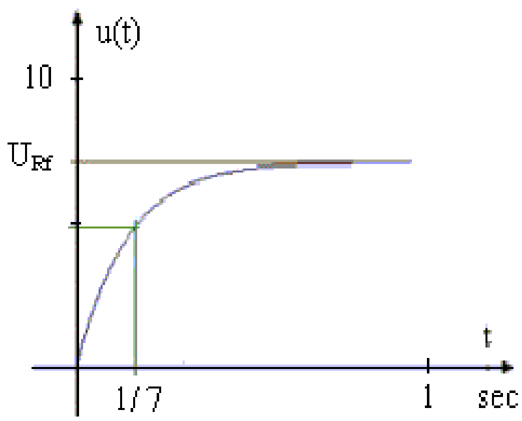
- **Calcolo della u(t)**

U(s) = E(s)*W(s)

Essendo anche in questo esempio l'ingresso un gradino di ampiezza 10 $\Rightarrow$ E(s)=10/s,

sostituendo si ha : $U(s) = \frac{10}{s}\frac{5}{s+7}$

Antitrasformando la U(s) si ha: $u(t) = \frac{10\cdot 5}{7}(1\text{-}e^{-7t}) = \frac{50}{7}(1\text{-}e^{-7t})$



- Calcolo della costante di tempo τ, del valore iniziale e quello finale

τ =1/7 sec

$$U_{Ri} = u(0) = \lim_{t \to 0} u_R(t) = \lim_{t \to 0} \frac{50}{7}(1 - e^{-7t}) = 0$$

$$U_{Rf} = u(\infty) = \lim_{t \to \infty} u_R(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{50}{7}(1 - e^{-7t}) = 25 \cong 7{,}14$$

<u>NOTA</u>
Dal confronto con l'esercizio precedente si evince che il sistema reazionato rispetto a quello non reazionato

- si porta a regime in un intervallo di tempo minore
- l'ampiezza del segnale d'uscita è minore

5.4 GENERALITÀ SUI SISTEMI DEL 2° ORDINE

La f.d.t. di un generico sistema del 2°ordine, scritta in forma standard e la seguente.

$$\boxed{G(s)=\frac{k\cdot\omega_n^{\;2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\;2}}}$$

Parametri caratteristici:

ζ è detto coefficiente di smorzamento (determina il tipo di risposta)

ω_n è chiamata pulsazione naturale

$k=\lim\limits_{s\to 0} G(s)$ guadagno statico

Poli della f.d.t.

I poli della f.d.t. si ricavano annullando il denominatore della G(s)

$$p_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\omega_n(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})$$

risulta inoltre che $p_1\cdot p_2=\omega_n^{\;2}$ (il prodotto delle radici è uguale al termine noto)

I poli sono per

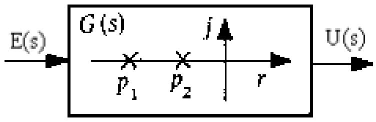
$\zeta>1$, reali distinti negativi

$\zeta=1$, reali coincidenti $\Rightarrow$ $p_1=p_2=-\omega_n$

$0<\zeta<1$, complessi coniugati

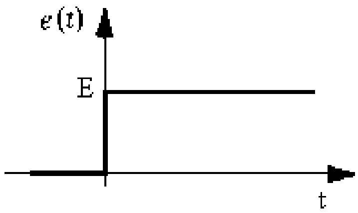
5.5 RISPOSTA AL GRADINO DI AMPIEZZA E DI UN SISTEMA DEL 2° ORDINE CON ζ>1, (POLI REALI DISTINTI E NEGATIVI)

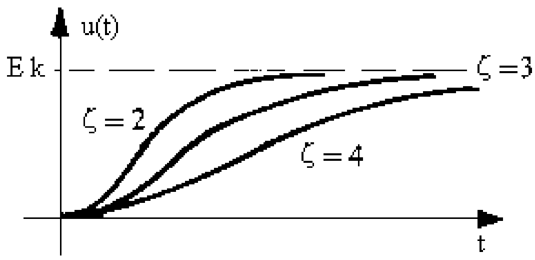
Consideriamo un sistema del secondo ordine con poli reali e distinti negativi (ζ >1)



$$G(s) = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k \cdot \omega_n^2}{(s - p1)(s - p2)}$$

<u>La risposta al gradino è aperiodica</u>





Dal grafico si rileva quando diminuisce il coefficiente di smorzamento aumenta la velocità della risposta.

- **<u>Calcolo del valore finale u(∞)</u>**

Sappiamo che l'uscita nel dominio complesso vale:

$$U(s) = E(s)*G(s)$$

Avendo in ingresso un gradino di ampiezza E $\Rightarrow$ E(s)=E/s,
sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{E}{s} \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Il valore finale $U_f = u(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot U(s) = E \cdot k$

- **<u>Calcolo della risposta u(t)</u>**

$$U(s) = \frac{E}{s} \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{E}{s} \frac{k \cdot \omega_n^2}{(s - p1)(s - p2)}$$

Antitrasformando la U(s), facendo uso della tabella delle T.d.L. al rigo 10

N°	Funzione $f(t)$ per $t \geqslant 0$	$L[f(t)]$
10	$\frac{1}{ab}\left(1-\frac{b}{b-a}e^{-at}+\frac{a}{b-a}e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

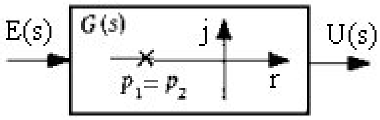
$$u(t) = E \cdot k \cdot \omega_n^2 \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-p1)(s-p2)}\right]$$

$$u(t) = E \cdot k \cdot \omega_n^2 \cdot \frac{1}{p1 \cdot p2}\left(1-\frac{p2}{p2-p1}e^{-p_1 t}+\frac{p1}{p2-p1}e^{-p_2 t}\right) \Rightarrow$$

$$u(t) = E \cdot k \left(1-\frac{p2}{p2-p1}e^{-p_1 t}+\frac{p1}{p2-p1}e^{-p_2 t}\right)$$

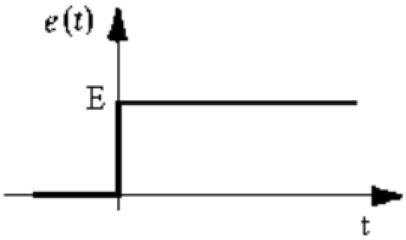
5.6 RISPOSTA AL GRADINO DI AMPIEZZA E DI UN SISTEMA DEL 2° ORDINE CON ζ=1, (POLI REALI CCOINCIDENTI E NEGATIVI)

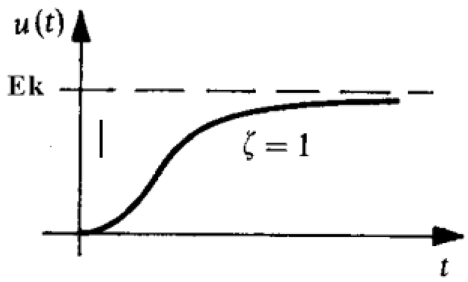
Consideriamo un sistema del secondo ordine con poli reali e distinti negativi ($\zeta > 1$)



$$G(s) = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k \cdot \omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \quad ; \quad p1 = -\ \omega_n$$

<u>La risposta al gradino è aperiodica</u>





- **<u>Calcolo del valore finale u(∞)</u>**

L'uscita vale: U(s) = E(s)*G(s)

Avendo in ingresso un gradino di ampiezza E $\Rightarrow$ E(s)=E/s,
sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{E}{s} \frac{k \cdot \omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

Tenendo presente che la funzione non presenta poli positivi, applicando il Teorema del valore finale si ha :

$$U_f = u(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot U(s) = E \cdot k$$

- **<u>Calcolo della risposta u(t)</u>**

$$U(s) = \frac{E}{s} \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{E}{s} \frac{k \cdot \omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

Antitrasformando la U(s), facendo uso della tabella delle T.d.L. al rigo 18

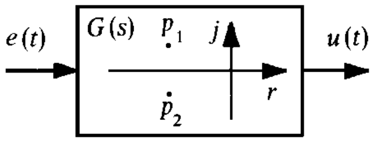
N°	Funzione $f(t)$ per $t \geqslant 0$	L $[f(t)]$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

$$u(t) = E \cdot k \cdot \omega_n{}^2 \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+\omega_n)^2}\right]$$

$$u(t) = E \cdot k \cdot \omega_n{}^2 \cdot \frac{1}{\omega_n{}^2}\left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t \cdot e^{-\omega_n t}\right) = E \cdot k \cdot \left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t \cdot e^{-\omega_n t}\right)$$

5.7 RISPOSTA AL GRADINO DI AMPIEZZA E DI UN SISTEMA DEL 2° ORDINE CON $0 \leq \zeta < 1$, (POLI COMPLESSI E CONIUGATI CON PARTE REALE NEGATIVA)

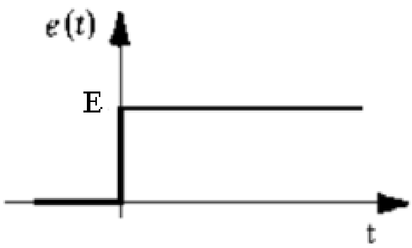
Consideriamo un sistema del secondo ordine con $0 < \zeta < 1$, (poli complessi e coniugati con parte reale negativa)

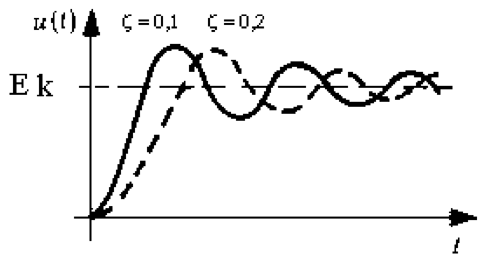


$$G(s) = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k \cdot \omega_n^2}{(s - p1)(s - p2)}$$

dove p1= $-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$; p2= $-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$

<u>La risposta al gradino è oscillatoria smorzata</u>





Dal grafico si rileva che quando diminuisce il valore del coefficiente di smorzamento ζ aumenta l'ampiezza delle oscillazioni la velocità della risposta

Per $\frac{1}{\sqrt{2}} < \zeta < 1$ l'oscillazione e ben smorzata. $(\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707)$

- **<u>Calcolo del valore finale u(∞)</u>**

L'uscita nel dominio vale: U(s) = E(s)*G(s)
Avendo in ingresso un gradino di ampiezza E $\Rightarrow$ E(s)=E/s,
sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{E}{s} \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Tenendo presente che la funzione U(s) non presenta poli a parte reale positiva, applicando il

Teorema del valore finale si ha :

$$U_f = u(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot U(s) = E \cdot k$$

- **Calcolo della risposta u(t)**

$$U(s) = \frac{E}{s} \quad \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Antitrasformando la U(s), facendo uso della tabella delle T.d.L. al rigo 34

N°	Funzione $f(t)$ per $t \geq 0$	$L[f(t)]$
34	$\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \theta)$ $\theta = \arccos\zeta$	$\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$

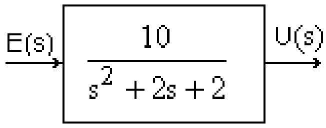
$$u(t) = E \cdot k \cdot \omega_n^2 \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\right] \qquad \Rightarrow$$

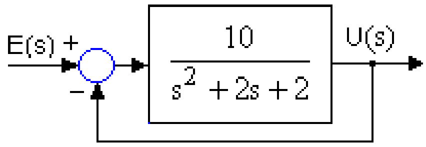
$$\mathbf{u(t) = E \cdot k}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \theta)\right] \qquad \theta = \arccos\zeta$$

5.8 ESERCIZI - RISPOSTA AL GRADINO DEI SISTEMI DEL 2° ORDINE REAZIONATI E NON REAZIONATI.

Es.1.

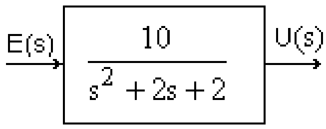
Studiare la risposta dei sistemi riportati in figura quando sono sollecitati da un segnale a gradino di ampiezza E = 4





Soluzione

a) Studio della riposta del sistema non retroazionato



Ricavo dei parametri caratteristici del sistema

- Dal confrontando della a nostra G(s) = $\dfrac{10}{s^2+2s+2}$ con quella standard di un sistema del 2°ordine $G(s) = \dfrac{k\cdot\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ si ha:

$$\omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{2} \cong 1{,}41 \text{ rad/sec (pulsazione naturale)}$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707 \text{ (coefficiente di smorzamento)}$$

$$k = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s^2+2s+2} = 5 \text{ (guadagno statico)}$$

Calcolo della U(s)

$G(s) = \dfrac{10}{s^2+2s+2}$; U(s) = E(s)*G(s)

Avendo in ingresso un gradino di ampiezza 4 $\Rightarrow$ E(s) = 4/s sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{4}{s}\,\frac{10}{s^2+2s+2}$$

Calcolo del valore finale U_f

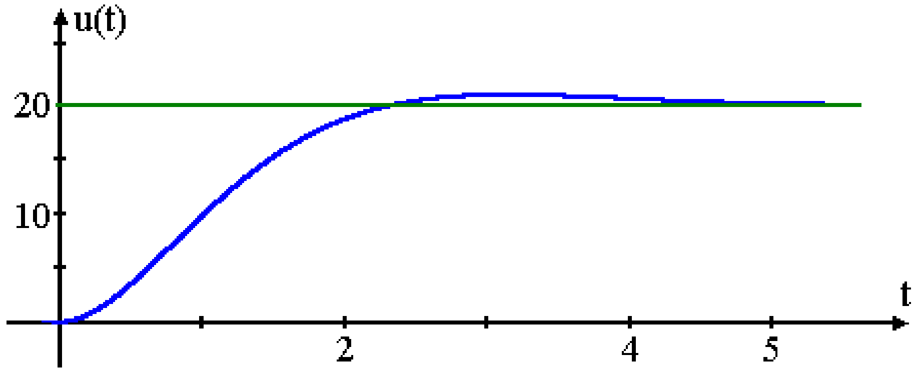
Calcolo dei poli $s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow$ s1= -1-j1; s2= -1+j1

Tenendo presente che la U(s) non presenta poli a parte reale positiva applicando il teorema del valore finale si ricava l'ampiezza della risposta a regime.

$$U_f = u(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot U(s) = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20$$

Grafico e risposta:

Essendo $\zeta \cong 0{,}707$ la risposta al gradino è oscillatoria smorzata



La risposta si ricava antitrasformando la U(s), facendo uso delle tabelle delle T.d.L.

$$U(s) = \frac{4}{s} \frac{10}{s^2 + 2s + 2}$$

N°	Funzione $f(t)$ per $t \geqslant 0$	$L\,[f(t)]$
34	$\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n^2 \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \theta)$ $\theta = \arccos\zeta$	$\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707 \;;\; \omega_n^2 = 2 \;;\; \omega_n = \sqrt{2} \cong 1{,}41$$

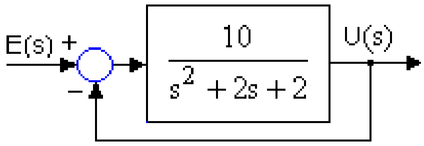
$$\theta = \arccos\ 0{,}707 = 0{,}785 = 45°$$

$$u(t) = 40 \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\right]$$

$$u(t) = 40\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1-0{,}5}} e^{-t} \mathrm{sen}(\sqrt{2}\sqrt{1-0{,}5} \cdot t + 0{,}785)\right] \Rightarrow$$

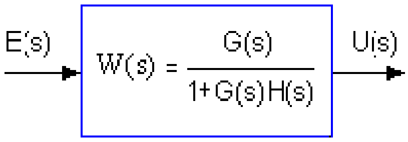
$$u(t) = 20\left[1-\frac{1}{\sqrt{0{,}5}}\cdot e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\sqrt{0{,}5}\cdot t+0{,}785)\right] = 20\cdot\left[1-\sqrt{2}\cdot e^{-t}\operatorname{sen}(t+0{,}785)\right]$$

b) Studio della riposta del sistema retroazionato



<u>Calcolo della f.d.t. del sistema retroazionato W(s)</u>

Il circuito retroazionato è equivalente al circuito in figura con H(s)=1



$$W(s) = \frac{\dfrac{10}{s^2+2s+2}}{1+\dfrac{10}{s^2+2s+2}} = \frac{10}{s^2+2s+12}$$

<u>Ricavo dei parametri caratteristici del sistema</u>

- Dal confrontando della a nostra $W(s) = \dfrac{10}{s^2+2s+12}$ con quella standard di un sistema del 2°ordine $G(s) = \dfrac{k\cdot\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ si ha:

$$\omega_{Rn}^2 = 12 \Rightarrow \omega_{Rn} = \sqrt{12} = 3{,}464 \text{ rad/sec}$$

$$2\zeta_R\,\omega_{Rn} = 2 \Rightarrow \zeta_R = \frac{1}{\omega_{Rn}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cong 0{,}289$$

$$k_R = \lim_{s\to 0}\frac{10}{s^2+2s+12} = \frac{5}{6}$$

<u>Calcolo della $U_R(s)$</u>

$W(s) = \dfrac{10}{s^2+2s+12}$; $U_R(s) = E(s)*W(s)$

Avendo in ingresso un gradino di ampiezza 4 $\Rightarrow$ E(s) = 4/s   sostituendo si ha :

$$U_R(s) = \frac{4}{s}\ \frac{10}{s^2+2s+12}$$

Calcolo del valore finale U_f

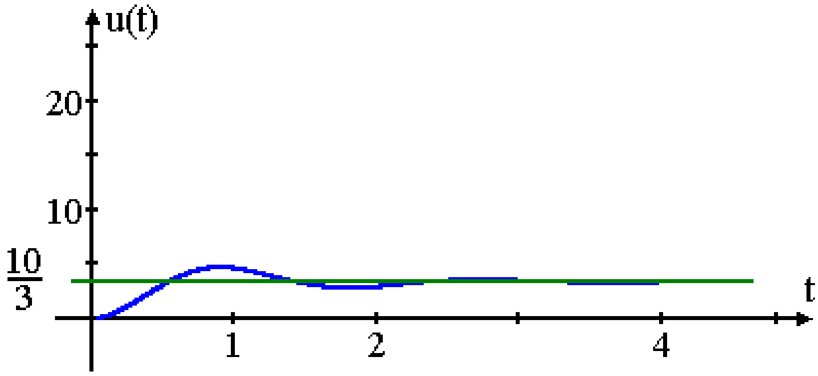
Calcolo dei poli $s^2+2s+2=0 \Rightarrow$ s1 = -1- j; s2 = -1 + j

Tenendo presente che la $\mathbf{U_R(s)}$ non presenta poli a parte reale positiva applicando il teorema del valore finale si ricava l'ampiezza della risposta a regime.

$$U_{Rf} = u(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot U(s) = \frac{4\cdot 10}{12} = \frac{10}{3}$$

Grafico e risposta:

Essendo $\zeta_R \cong 0{,}29$ la risposta al gradino è oscillatoria smorzata



La risposta si ricava antitrasformando la U(s), facendo uso delle tabelle delle T.d.L.

$$U(s) = U(s) = \frac{4}{s}\ \frac{10}{s^2+2s+12} \qquad \Rightarrow\ u(t) = 40\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+12}\right]$$

N°	Funzione $f(t)$ per $t \geqslant 0$	$L\,[f(t)]$
34	$\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\theta)$ $\theta = \arccos\zeta$	$\frac{1}{s\,(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{12}} \cong 0{,}289;\ \ \zeta^2 = \frac{1}{12} = 0{,}083;\ \ \omega_n{}^2 = 12;\ \ \omega_n = \sqrt{12} \cong 3{,}464\ \text{rad/sec}$$

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 3{,}464\cdot\sqrt{1-0{,}083} = 3{,}464\cdot 0{,}957 = 3{,}32\ \text{rad/sec}$$

$$\theta = \text{ar}\cos\ 0{,}29 = 1{,}278$$

$$u(t) = 40\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 0{,}957} e^{-t} \mathrm{sen}(3{,}32 \cdot t + 1{,}278)\right] \Rightarrow$$

$$u(t) = \frac{40}{12}\left[1 - \frac{1}{0{,}957} \cdot e^{-t} \mathrm{sen}(3{,}32 \cdot t + 1{,}278)\right] \Rightarrow$$

$$u(t) = \frac{10}{3}\left[1 - \frac{1}{0{,}957} \cdot e^{-t} \mathrm{sen}(3{,}32 \cdot t + 1{,}278)\right]$$

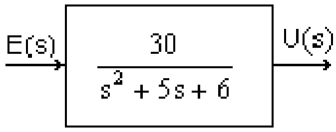
Nota:
Dall'analisi dei parametri, si nota che l'ampiezza della risposta a regime, il coefficiente di smorzamento ζ e il guadagno statico del sistema retroazionato sono minori di quelli del sistema non reazionato

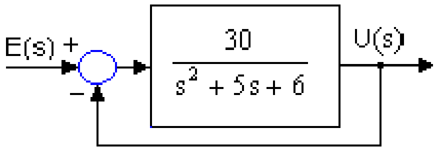
Sistema non retroazionato		
ζ	k	U_f
0,709	5	20

Sistema retroazionato		
ζ_R	k_R	U_{Rf} $=U_f/k+1$
0,289	5/6	$\frac{10}{3}$

Es.2.

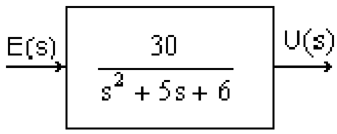
Studiare la risposta dei sistemi riportati in figura quando sono sollecitati da un segnale a gradino di ampiezza E = 4





Soluzione

c) Studio della riposta del sistema non retroazionato



Ricavo dei parametri caratteristici del sistema

- Confrontando la nostra G(s)) con quella standard di un sistema del 2°ordine

$G(s) = \dfrac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ si ricavano i parametri caratteristici:

$$\omega_n^2 = 6 \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{6}\ \text{rad/sec}$$

$$2\zeta\omega_n = 5 \Rightarrow \quad \zeta = \frac{5}{2\omega_n} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \cong 1{,}02$$

$$k = \frac{30}{6} = 5$$

Calcolo della U(s)

$G(s) = \dfrac{30}{s^2 + 5s + 6}$; $U(s) = E(s)*G(s)$

Avendo in ingresso un gradino di ampiezza 4 $\Rightarrow$ E(s) = 4/s

sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{4}{s}\,\frac{30}{s^2 + 5s + 6}$$

Calcolo del valore finale U_f

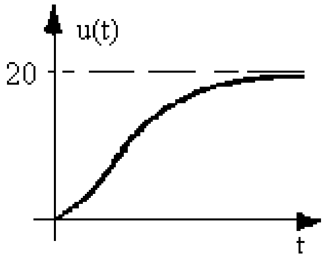
I poli sono reali distinti e negativi $s^2 + 5s + 6 = 0 \Rightarrow$ p1= -2; p2= -3

Tenendo presente che la U(s) non presenta poli a parte reale positiva applicando il teorema del valore finale si ricava l'ampiezza della risposta a regime.

$$u(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot U(s) = \frac{4 \cdot 30}{6} = 20$$

Grafico e risposta:

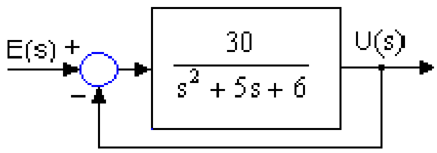
Essendo $\zeta \cong 1{,}02 > 1$ la risposta al gradino è aperiodica



La risposta si ricava antitrasformando la U(s), facendo uso delle tabelle delle T.d.L.

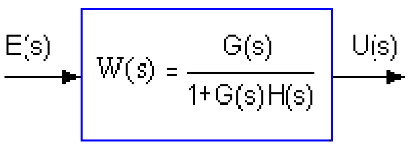
$$U(s) = U(s) = \frac{4}{s}\,\frac{30}{s^2+5s+6} = \frac{4}{s}\,\frac{30}{(s+2)(s+3)}$$

d) Studio della riposta del sistema retroazionato



Calcolo della f.d.t. del sistema retroazionato W(s)

Il circuito retroazionato è equivalente al circuito in figura con H(s)=1



$$W(s) = \frac{\dfrac{30}{s^2+5s+6}}{1+\dfrac{30}{s^2+5s+6}} = \frac{30}{s^2+2s+36}$$

Ricavo dei parametri caratteristici del sistema

- Dal confrontando della a nostra $W(s) = \dfrac{30}{s^2 + 2s + 36}$ con quella standard di un sistema del 2°ordine $G(s) = \dfrac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ si ha:

$$\omega_{Rn}^2 = 6 \Rightarrow \omega_{Rn} = \sqrt{36} = 6 \text{ rad/sec}$$

$$2\zeta_R \omega_{Rn} = 2 \Rightarrow \zeta_R = \frac{2}{2\omega_{Rn}} = \frac{1}{6} = 0{,}17$$

$$k_R = \lim_{s \to 0} \frac{30}{s^2 + 2s + 36} = 5/6 \cong 0{,}83$$

Calcolo della $U_R(s)$

$W(s) = \dfrac{30}{s^2 + 2s + 36}$; $U_R(s) = E(s)*W(s)$

Avendo in ingresso un gradino di ampiezza 4 $\Rightarrow$ $E(s) = 4/s$ sostituendo si ha :

$$U_R(s) = \frac{4}{s} \frac{30}{s^2 + 2s + 36}$$

Calcolo del valore finale U_{Rf}

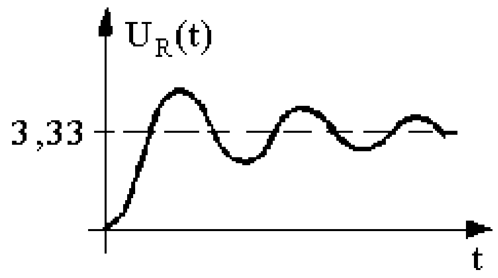
Calcolo dei poli $s^2 + 2s + 36 = 0 \Rightarrow s_1 = -1 - j\sqrt{35}$; $s_2 = -1 + j\sqrt{35}$

Tenendo presente che la **$U_R(s)$** non presenta poli a parte reale positiva applicando il teorema del valore finale si ricava l'ampiezza della risposta a regime.

$$U_{Rf} = u(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot U(s) = \frac{4 \cdot 30}{36} = \frac{10}{3} \cong 3{,}33$$

Grafico e risposta:

Essendo $\zeta_R \cong 0{,}17$ la risposta al gradino è oscillatoria smorzata



La risposta si ricava antitrasformando la U(s), facendo uso delle tabelle delle T.d.L.

$$U_R(s) = \frac{4}{s} \frac{30}{s^2 + 2s + 36}$$

5.9 ELEMENTI CARATTERISTICI DELLA RISPOSTA DI UN SISTEMA AL GRADINO

Se applichiamo un segnale a gradino all'ingresso di un sistema stabile questo risponde con un segnale che può avere l'andamento di fig.1 o quello di fig.2

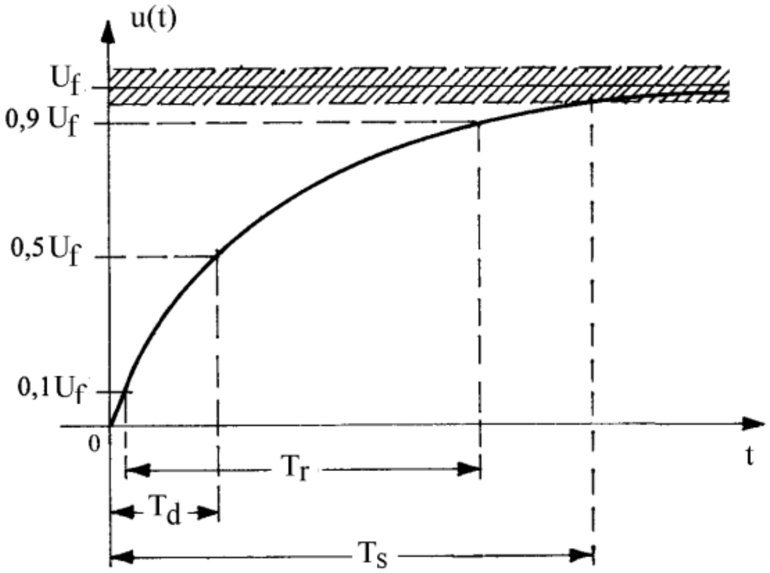


Fig.1

Risposta aperiodica o smorzata

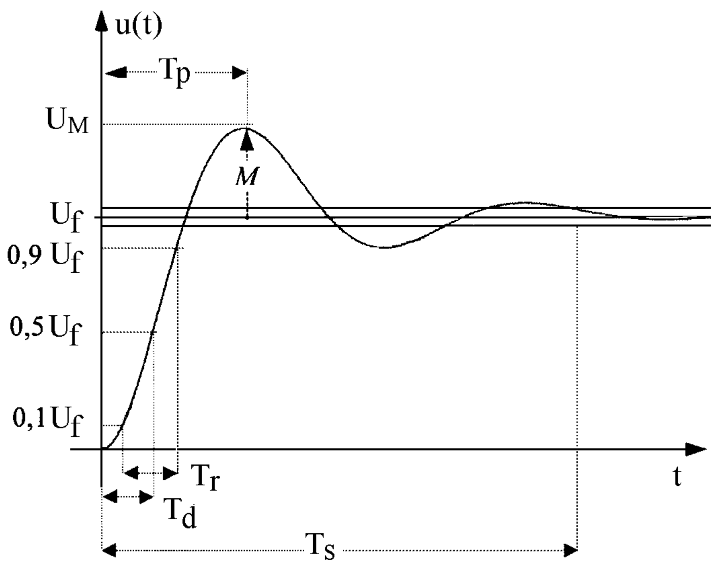


Fig.2

Risposta oscillante smorzata

Parametri caratteristici che permettono di valutare le prestazioni di un sistema

Tr = tempo di salita (rise time) è definito come il tempo necessario perché il valore della risposta aumenti dal 10% al 90% del valore finale

Td = tempo di ritardo (delay time) è definito come il tempo necessario perché il valore della risposta sia uguale al 50% del suo valore finale

Ts = tempo di assestamento (setting time) è definito come il tempo necessario perché il valore della risposta sia compreso entro una fascia di valori prestabiliti che si discostano dell' 1% ÷ 5% dal valore finale U_f

- **Per un sistema del 1° ordine:**

$$\mathbf{G(s)}=\frac{k}{s+a} \qquad \text{con } a>0$$

$\tau=\dfrac{1}{|p|}=\dfrac{1}{a}$ (costante di tempo) **;** $Tr \cong 2,2\tau$; $Td \cong 0,7\tau$

Ts al 1% $\cong 4,6\tau$; Ts al 2% $\cong 3,9\tau$; Ts al 5% $\cong 3\tau$

- **Per un sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati per un ingresso a gradino unitario.**

$$G(s)=\frac{k\cdot\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad \text{con } 0<\zeta<1$$

$Tr=\dfrac{1+1{,}1\zeta+1{,}4\zeta^2}{\omega_n}$; $Td=\dfrac{1+0{,}7\cdot\zeta}{\omega_n}$

Ts al 2% $=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}$; Ts al 5% $=\dfrac{3}{\zeta\omega_n}$

$Tp=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ tempo per raggiungere il max della risposta U_M

$M=U_M-U_f=U_f\cdot e^{-\frac{\pi\cdot\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ altezza del picco (overshoot)

$U_M=U_f+M$ valore massimo raggiunto dall'uscita

$$M\%=\frac{U_M-U_f}{U_f}100 = e^{-\frac{\pi\cdot\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\cdot 100$$

$$U_M=U_f+\frac{M\%}{100}U_f$$

5.10 ESERCIZI - RISPOSTA AL GRADINO E PARAMETRI CARATTERISTICI

Es.1
Un segnale a gradino di ampiezza 2 è applicato ad un sistema del I° ordine la cui fdt è la seguente

$$G(s) = \frac{12000}{4s + 24000}$$

Determinare: a) la risposta in funzione del tempo; b)il tempo di salita del segnale d'uscita; c)il tempo necessario per raggiungere il 99% del valore a regime; d)il valore a regime del segnale d'uscita.
Soluzione

- **Calcolo della risposta in funzione del tempo**

L'uscita vale: $U(s) = E(s)*G(s)$
Essendo in questo caso l'ingresso un gradino di ampiezza 2 $\Rightarrow$ $E(s)=2/s$,
sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{2}{s}\frac{12000}{4s+24000} = \frac{2}{s}\frac{3000}{s+600} = \frac{6000}{s(s+600)}$$

Antitrasformando si ha: $u(t) = \frac{6000}{600}(1\text{-}e^{-600t}) = 10(1\text{-}e^{-600t})$

- **Calcolo del tempo di salita del segnale d'uscita Tr**

$$\tau = \frac{1}{|p|} = 1/600 \text{ sec} \quad \text{dove } p= -600 \text{ (polo)}$$

$$Tr \cong 2{,}2\tau = \frac{2{,}2}{600} = 3{,}67 \text{ msec}$$

- **Calcolo del tempo necessario per raggiungere il 99% del valore a regime**

$$Ts \text{ al } 1\% \cong 4{,}6\tau = \frac{4{,}6}{600} = 7{,}67 \text{ msec}$$

- **Calcolo del valore a regime del segnale d'uscita.**

$$U_f = u(\infty) = \lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} 10(1\text{-}e^{-600t}) = 10$$

oppure con il teorema del valore finale

$$U_f = u(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot U(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{6000}{s(s+600)} = 10$$

Es.2
Un segnale a gradino di ampiezza 2 è applicato ad un sistema del II ordine la cui fdt è la seguente: $G(s) = \dfrac{90}{s^2 + 6s + 18}$

Determinare: a) la risposta in funzione del tempo; b) il valore a regime; c)l'istante se esiste in cui avviene l'overshoot del segnale d'uscita; d)il valore max del segnale d'uscita

Soluzione

- **Calcolo della risposta in funzione del tempo**

Confrontiamo la nostra fdt con quella standard $G(s) = \dfrac{90}{s^2 + 6s + 18} = \dfrac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$\omega_n^2 = 18 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{18}$ rad/sec (pulsazione naturale)

$2\zeta\omega_n = 6 \Rightarrow \zeta = \dfrac{6}{2\omega_n} = \dfrac{3}{\sqrt{18}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707$ (coefficiente di smorzamento)

$k = \lim\limits_{s \to 0} G(s) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{90}{s^2 + 6s + 18} = 90/18$ (guadagno statico)

I poli della f.d.t. sono complessi e coniugati, la risposta e oscillatoria smorzata e sarà presente un overshoot.
L'uscita vale: $U(s) = E(s)*G(s)$
Essendo in questo caso l'ingresso un gradino di ampiezza 2 $\Rightarrow$ $E(s)=2/s$ sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{2}{s}\,\frac{90}{s^2 + 6s + 18}$$

Antitrasformando si ha: $u(t) = 10 - 14{,}14\, e^{-3t} \cdot \mathrm{sen}(3t + \pi/4)$

- **Calcolo del valore a regime del segnale d'uscita.**

$$U_f = u(\infty) = \lim_{t \to \infty} u(t) = \lim_{t \to \infty} 10 - 14{,}14\, e^{-3t}\ \mathrm{sen}(3t + \pi/4) = 10$$

oppure con il teorema del valore finale in quanto i poli della G(s) hanno parte reale negativa.

$$U_f = u(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot U(s) = \lim_{s \to 0} s\,\frac{2}{s}\,\frac{90}{s^2 + 6s + 18} = 10$$

- **Calcolo dell'istante in cui avviene l'overshoot del segnale d'uscita**

$$Tp = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}\sqrt{1 - 0{,}5}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}\sqrt{0{,}5}} = \frac{3{,}14}{3} = 1{,}047 \text{ sec}$$

Metodo alternativo:
Per trovare l'istante in cui l'uscita è massima calcoliamo e annulliamo la derivata prima

$D[u(t)] = D[10 - 14{,}14\, e^{-3t} \cdot sen(3t+\pi/4)] = -14{,}14\, e^{-3t} \cdot (-3) \cdot cos(3t+\pi/4) \cdot (+3) \Rightarrow$

$D[u(t)] = 9 \cdot 14{,}14 \cdot e^{-3t} \cos(3t + \pi/4) = 0 \Rightarrow$

$3t + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} t \Rightarrow t = 1{,}047$ sec

- **Calcolo del massimo valore raggiunto del segnale d'uscita**

$$M = U_M - U_f = U_f \cdot e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 10\, e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0{,}43 \quad \text{altezza del picco}$$

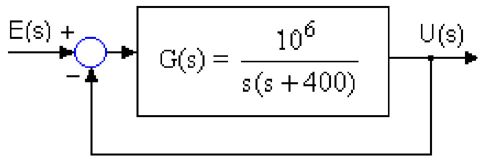
$$U_M = U_f + M = 10 + 0{,}43 = 10{,}43$$

Metodo alternativo:
Il valore max si ha per t=1,047 pertanto:

$U_M = u(t=1{,}047) = 10 - 14{,}14\, e^{-3t} \cdot sen(3t + \pi/4) = 10.43$

Es.3

Il sistema descritto dallo schema a blocchi è sottoposto ad un gradino di ampiezza 5



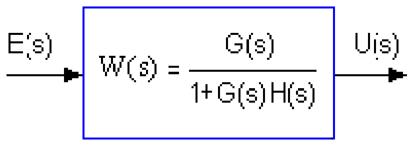
Determinare:

a) il valore a regime
b) il tempo di salita
c) il tempo a cui avviene l'overshoot
d) il valore dell'overshoot
e) il valore max del segnale d'uscita
f) il tempo di assestamento al 2%

Soluzione

- **Calcolo della risposta U(s)**

Il circuito retroazionato è equivalente al circuito in figura con H(s)=1



$$W(s) = \frac{\dfrac{10^6}{s(s+400)}}{1+\dfrac{10^6}{s(s+400)}} = \frac{10^6}{s(s+400)+10^6} = \frac{10^6}{s^2+400s+10^6}$$

Confrontiamo la nostra fdt con quella standard

$$W(s) = \frac{10^6}{s^2+400s+10^6} = \frac{k\cdot\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

$$\omega_n{}^2 = 10^6 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{10^6} = 10^3 = 1000 \text{ rad/sec (pulsazione naturale)}$$

$$2\zeta\omega_n = 400 \Rightarrow \zeta = \frac{400}{2\omega_n} = \frac{400}{2\cdot 1000} = 0{,}2 \text{ (coefficiente di smorzamento)}$$

$$k = \lim_{s\to 0} W(s) = \lim_{s\to 0} = \frac{10^6}{s^2+400s+10^6} = 1 \text{ (guadagno statico)}$$

I poli della f.d.t. sono complessi e coniugati, la risposta e oscillatoria smorzata e sarà presente un overshoot.

L'uscita vale: U(s) = E(s)*W(s)
Essendo in questo caso l'ingresso un gradino di ampiezza 5 $\Rightarrow$ E(s)=5/s sostituendo si ha :

$$U(s) = \frac{5}{s}\,\frac{10^6}{s^2+400s+10^6} = \frac{5\cdot 10^6}{s(s^2+400s+10^6)}$$

- **Calcolo del valore a regime del segnale d'uscita.**

$$U_f = u(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot U(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{5\cdot 10^6}{s(s^2+400s+10^6)} = 5$$

- **Calcolo del tempo di salita**

$$Tr = \frac{1+1{,}1\zeta+1{,}4\zeta^2}{\omega_n} = \frac{1+1{,}1\cdot 0{,}2+1{,}4\cdot 0{,}2^2}{1000} = 1{,}276 \text{ msec}$$

- **Calcolo del tempo a cui avviene l'overshoot**

$$Tp = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{3{,}14}{1000\sqrt{1-0{,}2^2}} = 3{,}20 \text{ msec}$$

- **Calcolo del massimo valore raggiunto del segnale d'uscita**

$$M = U_M - U_f = U_f\cdot e^{-\frac{\pi\cdot\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 5\cdot e^{-\frac{\pi\cdot 0{,}2}{\sqrt{1-0{,}2^2}}} = 2{,}63 \text{ valore del picco (overshoot)}$$

$$U_M = U_f + M = 5 + 2{,}63 = 7{,}63 \quad \text{valore massimo raggiunto dall'uscita}$$

- **Calcolo del tempo di assestamento al 2%**

$$Ts \text{ al } 2\% = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0{,}2\cdot 1000} = 20 \text{ msec}$$